Podstawy kształcenia matematycznego
Wykład 3
Elementy teorii zbiorów
20 lutego 2010

1 Pojęcie zbioru

Zbiór jest najważniejszym pojęciem matematycznym. Bez tego pojęcia trudno wyobrazić sobie współczesną matematykę i dydaktykę matematyczną. Jak pokażemy to w kolejnym wykładzie, bez tego pojęcia trudno byłoby też operować pojęciem liczby. Jednym z powodów takiego stanu rzeczy jest to, że w matematyce zbiór jest *pojęciem pierwotnym*, a więc nie wymagającym definicji. Postuluje się, że istnieje co najmniej jeden zbiór. Nazwa *zbiór* odnosi się zarówno do *obiektu* jak i do *mnogości*. W takim razie zbiór (jako obiekt) identyfikowany jest poprzez swoją nazwę, z kolei jako mnogość poprzez elementy (składające się na ten zbiór). Przyjęto, że zbiory oznaczamy dużymi literami. W takim razie A może być nazwą zbioru. Konsekwentnie dowolny element zbioru A oznaczany jest odpowiednikiem w postaci małej litery. Jeśli w kontekście zbioru A pojawi się symbol a, to należy traktować a jako element zbioru A, co będziemy zapisywali $a \in A$. W takim razie należy wziąć pod uwagę przypadek, kiedy mamy do czynienia z obiektem typu zbiór, ale bez efektu mnogości. O takim zbiorze powiemy, że jest *zbiorem pustym* i oznaczymy go przez $\emptyset$. W przeciwnym razie będziemy mówili, że mamy do czynienia ze zbiorem *niepustym*. Wtedy dla takiego zbioru A, warunek $a \in A$ zachodzi co najmniej dla jednego elementu a.

Dalej wygodniej będzie nam przyjąć koncepcję *zbioru uniwersalnego*, a więc takiego, że każdy niepusty zbiór A składa się tylko z elementów tego zbioru. Ten zbiór uniwersalny oznaczymy przez X. Wtedy dla elementu $x \in X$ i zbioru A, warunek $x \in A$ jest zdaniem logicznym, bowiem zgodnie z powyższym założeniem, albo x jest elementem zbioru A, albo nie. Przyjmiemy zasadę, że o ile napiszemy $x \in A$, to zdanie to będzie prawdziwe. W takim razie

$$\neg(x \in A) \equiv x \notin A,$$

gdzie $x \notin A$ oznacza, że x nie jest elementem zbioru A.

Z punktu widzenia atrybutu mnogości, zbiory dzielimy na *zbiory skończone* i *nieskończone*, czyli takie które nie są skończone, gdzie skończoność zbioru rozumiana jest jako własność zbioru pozwalająca na identyfikację zbioru poprzez przedstawienie jego wszystkich elementów. Jeśli zbiór A jest skończony, to możemy wtedy napisać

$$A = \{a, b, c\},$$

co oznacza, że A jest zbiorem trzy–elementowym. I ogólnie, powiemy, że A jest zbiorem *n–elementowym*, jeśli

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\},$$

gdzie a_j oznacza tylko nazwę elementu, a nie np. miejsce jakie element ten zajmuje w zbiorze. Wtedy *miarę liczebności* takiego zbioru oznaczymy przez $|A|$ i nazwiemy jego *mocą*, gdzie dla kompletności rozważań przyjmuje się, że $|\emptyset| = 0$.

Z definicji przyjmiemy, że dla dowolnych zbiorów A, B

$$A = B \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \forall_{x \in X} \Big(x \in A \equiv x \in B\Big).$$

Będziemy wtedy mówili, że zbiór A jest równy zbiorowi B.

Fakt 1.1 *Jeśli $|A| \neq |B|$, to $A \neq B$.*

Dowód. Wystarczy zauważyć (dlaczego?), że z definicji mocy zbioru wynika, że jeśli dwa zbiory są sobie równe, to mają jednakową moc.

Przykład 1.1 *Czy prawdziwa jest następująca wersja powyższego faktu: jeśli $|A| = |B|$, to $A = B$.*

Problem pojawia się w chwili, kiedy zbiór A nie ma własności zbioru skończonego, czyli jest zbiorem nieskończonym. Z jednej strony takie zbiory istnieją, o czym szczegółowo powiemy później, z drugiej strony nie ma sposobu aby takie zbiory zidentyfikować poprzez wypisanie wszystkich ich elementów. Prowadzi to nas to konkluzji–musi istnieć inny, bardziej uniwersalny sposób identyfikowania zbioru z punktu widzenia aspektu mnogościowego. Czas aby ten sposób zaprezentować.

2 Jakościowy opis zbioru

Dotychczasowe podejście do pojęcia zbioru miało charakter *ilościowy.* Jak zauważyliśmy taki sposób sprawdza się tylko w przypadku zbiorów skończonych. Zademonstrujemy teraz podejście uniwersalne, po raz pierwszy zaproponowane przez matematyka francuskiego G. Cantora, bazujące na znanym nam pojęciu predykatu.

Niech φ oznacza predykat określony na zbiorze X oraz A oznacza zbiór złożony z tych i tylko tych elementów x zbioru X, które mają tę własność, że zachodzi $\varphi(x)$, czyli jest zdaniem prawdziwym, co zapiszemy

$$A = \{x \in X\colon\ \varphi(x)\}.$$

Na odwrót ustalmy zbiór A. Weźmy (można pokazać, że taki predykat istnieje) dowolny predykat φ_A określonym na zbiorze X, że $\varphi_A(x) \equiv 1$, jeśli $x \in A$ i odpowiednio $\varphi_A(x) \equiv 0$, jeśli $x \notin A$. Udowodniliśmy w ten sposób podstawowe twierdzenie

Twierdzenie 2.1 *(Cantora) Istnieje wzajemna odpowiedniość pomiędzy zbiorami zawartymi w X a predykatami określonymi na zbiorze X. W szczególności dla każdego takiego zbioru A mamy $A = \{x \in X\colon\ \varphi_A(x)\}$ dla pewnego predykatu φ_A.*

Przykład 2.1 *Niech $A = \{a, b, c\}$. Podać przykład predykatu φ_A.*

Zauważmy, (dlaczego?) że wystarczy wziąć

$$\varphi_A(x) = \ ''x = a'' \ \vee \ ''x = b'',\ ''x = c'' \ \text{dla } x \in X.$$

I ogólnie powtarzając konstrukcję z powyższego przykładu, można opisać dowolny zbiór skończony, w szczególności zbiór pusty.

3 Rachunek zbiorów

Pokażemy teraz korzyści wynikające z jakościowego opisu zbioru. Dla zbiorów A, B będziemy pisali $A \subset B$, jeśli

$$\forall_{x \in X}\ x \in A \Rightarrow x \in B$$

i będziemy czytali "zbiór A jest zawarty w zbiorze B".

Zauważmy, że

Fakt 3.1 *1.*

$$\forall_A\ \emptyset \subset A,$$

2.

$$A = B \ \equiv\ A \subset B \ i \ B \subset A.$$

Dla ustalonego zbioru A weźmy teraz zbiór C określony następująco

$$\{x \in X\colon\ \neg(x \in A)\}.$$

Z definicji zbioru C wynika, że

1.

$$x \in C\ \equiv x \notin A,$$

2.

$$\forall_{x \in X}\ x \in A\ \vee\ x \in C.$$

Dalej zbiór C będziemy oznaczali przez A^c i nazywali *dopełnieniem (względem X) zbioru A.* Na dopełnienie zbioru należy spojrzeć jak na wynik *jednoargumentowego działania mnogościowego* zwanego też *dopełnieniem mnogościowym.* Opis jakościowy zbioru jakim posłużyliśmy się pokazuje, że działanie to jest odpowiednikiem jednoargumentowego funktora na zdaniach-negacji. Co więcej, opis ten zapewnia dziedziczenie wszystkich tautologii rachunku zdań. W szczególności mamy (patrz też punkt (1)) następującą własność dopełnienia

$$\left(A^c\right)^c = A$$

odpowiadającą zasadzie podwójnej negacji. Pokażemy teraz w jaki sposób przetłumaczyć takie funktory jak: $\vee$, $\wedge$, w efekcie definiując przykłady *dwuargumentowych działań mnogościowych.*

Ustalmy dwa zbiory

$$A = \{x \in X\colon\ \varphi_A(x)\},\ B = \{x \in X\colon\ \varphi_B(x)\}$$

odpowiadające odpowiednio predykatom φ_A i φ_B. Definiujemy dwa nowe zbiory

$$D = \{x \in X\colon\ \varphi_A(x) \vee \varphi_B(x)\},\ E = \{x \in X\colon\ \varphi_A(x) \wedge \varphi_B(x)\}.$$

Zauważmy, że

$$x \in D\ \equiv x \in A \text{ lub } x \in B \text{ oraz } x \in E\ \equiv x \in A \text{ i } x \in B.$$

Dalej zbiory te będziemy oznaczali odpowiednio

$$D = A \cup B \text{ oraz } E = A \cap B,$$

i nazywali *sumą mnogościową* i *iloczynem mnogościowym*, natomiast symbole $\cup$ i $\cap$ będą oznaczały dwuargumentowe działania mnogościowe: *sumę* i *iloczyn*. Skoro tak, to tautologie prawdziwe dla alternatywy i koniunkcji mają swoje mnogościowe wersje, które sformułujemy w postaci następującego twierdzenia

Twierdzenie 3.1 *Dla dowolnych zbiorów A, B i C mamy:*

1.
$$A \cup B = B \cup A, \; A \cap B = B \cap A \; (\textit{przemienność}),$$

2.
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \; (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \; (\textit{łączność}),$$

3.
$$A \cup X = X, \; A \cap \emptyset = \emptyset \; (\textit{zasada dominacji}),$$

4.
$$A \cup \emptyset = A, \; A \cap X = A \; (\textit{zasada identyfikacji}),$$

5.
$$A \cup A^c = X, \; A \cap A^c = \emptyset \; (\textit{zasada wyłączonego środka i zasada sprzeczności}),$$

6.
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \; (A \cap B)^c = A^c \cup B^c \; (\textit{prawa de Morgana}),$$

7.
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \; A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \; (\textit{rozdzielność}).$$

Przykład 3.1 *Wykorzystując pojęcie diagramu Vienna (patrz np. "Matematyka dyskretna dla informatyków") zilustrować zasady rachunku zbiorów opisane w powyższym twierdzeniu.*

Przykład 3.2 *Pokazać, że dla dowolnych podzbiorów A i B zbioru X*

$$A \cap B^c = \emptyset \equiv A \subset B.$$

Metoda 1 diagram Vienna (zostawiamy Czytelnikowi).
Metoda 2 rachunek zdań:
równość $A \cap B^c = \emptyset$ potraktujemy jako zdanie prawdziwe i pokażemy, że implikuje ono prawdziwość zdania $A \subset B$ i na odwrót. Niech więc prawdą będzie, że zbiory A i B^c są rozłączne. Gdyby zdanie $A \subset B$ nie było prawdziwe, to z definicji inkluzji znajdzie się co najmniej jeden element $x_o \in X$ taki, że $x_o \in A$ i $\neg(x_o \in B)$. Ale wtedy $x_o \in A \cap B^c$, co przeczy założeniu. W takim razie z zasady reductio absurdum wynika, że zdanie $A \cap B^c = \emptyset$ implikuje logicznie zdanie $A \subset B$, co kończy tę część dowodu.
Jeśli teraz prawdą jest, że $A \subset B$, to żaden element zbioru B^c nie może być elementem zbioru A–w przeciwnym razie gdyby dla pewnego $x_o \in B^c$, $x_o \in A$, to z założenia $x_o \in B$, co z zasady sprzeczności jest niemożliwe i kończy dowód.

W rachunku zbiorów wygodnie jest zdefiniować jeszcze jedno działanie–*różnicę mnogościową* oznaczane przez \, gdzie

$$A \setminus B = A \cap B^c.$$

Przykład 3.3 *Pokazać, że dla dowolnych dwóch zbiorów A, B mamy*

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B).$$

Z definicji różnicy mnogościowej i prawa de Morgana

$$A \setminus (A \cap B) = A \cap (A \cap B)^c = A \cap (A^c \cup B^c).$$

Z zasady rozdzielności iloczynu mnogościowego względem sumy i zasady sprzeczności dostaniemy

$$A \setminus (A \cap B) = (A \cap A^c) \cup (A \cap B^c) = \emptyset \cup (A \cap B^c).$$

Wreszcie z zasady identyfikacji

$$A \setminus (A \cap B) = A \cap B^c,$$

co należało pokazać.

Przykład 3.4 *Pokazać, że dla dowolnych zbiorów A, B mamy*

$$A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \cup (B \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B).$$

Z poprzedniego przykładu wystarczy pokazać, że

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B),$$

gdzie dowód ostatniej równości pozostawiamy Czytelnikowi.

Przykład 3.5 *Uzsadnić, że dla dowolnych zbiorów skończonych A, B*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Jeśli $A \cap B = \emptyset$, to powyższy wzór jest prawdziwy. W przeciwnym razie skorzystamy z wyniku ostatniego przykładu, w którym pokazaliśmy, że $A \cup B$ można przedstawić jako sumę parami rozłącznych zbiorów. Dlatego

$$|A \cup B| = |A \setminus (A \cap B)| + |B \setminus (A \cap B)| + |A \cap B|.$$

Ponieważ dla dowolnych dwóch zbiorów skończonych E, F takich, że $E \subset F$, $|F \setminus E| = |F| - |E|$ (dlaczego?), z ostatniej równości dostaniemy

$$|A \cup B| = |A| - |A \cap B| + |B| - |A \cap B| + |A \cap B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Na koniec zdefiniujemy jeszcze jedno bardzo ważne działanie mnogościowe– *iloczyn kartezjański*. Ponieważ natura tego działania różni się istotnie od poprzednich, zaczniemy wszystko od początku. Niech X ma dotychczasowe znaczenie. Weźmy dwa elementy $x, y \in X$, gdzie być może $x = y$. Efektem uporządkowania tych elementów będzie wtedy *para uporządkowana*, którą zapiszemy (x, y), o ile spośród tych dwóch wybranych, element x wybraliśmy jako pierwszy. Definiujemy nowy zbiór, który oznaczymy przez $X \times X$ następująco

$$X \times X = \{(x, y)\colon\ x, y \in X\}.$$

Tak zdefiniowany zbiór będzie pełnił w dalszym ciągu rolę zbioru uniwersalnego. Jeśli teraz $A, B \subset X$, to *iloczynem kartezjańskim* zbioru A i B nazywamy zbiór

$$A \times B = \{(x, y) \in X \times X\colon\ x \in A\ \wedge y \in B\},$$

o ile oba zbiory są niepuste. W przeciwnym razie przyjmiemy, że $A \times B = \emptyset$.

Przykład 3.6 *Dane są dwa zbiory skończone A, B o mocy odpowiednio równej $|A|$ i $|B|$. Wyznaczyć moc zbioru $A \times B$.*

Należy zauważyć, że każdemu elementowi $a \in A$ odpowiada $|B|$ różnych elementów zbioru $A \times B$. Ponieważ różnym elementom zbioru A odpowiadają różne elementy zbioru $A \times B$, moc tego zbioru wynosi $|A| \cdot |B|$.