Podstawy kształcenia matematycznego
Wykład 4
Zbiór liczb naturalnych i jego własności
8 marca 2010

1 Pojęcie liczby

Zaprezentujemy tzw. *kardynale* podejście do teorii liczb oparte na pojęciu mocy zbioru, o czym mówiliśmy na poprzednim wykładzie. Weźmy dowolny zbiór jednoelementowy A, czyli taki, że $A = \{a\}$ dla pewnego $a \in X$.

Definicja 1.1 *Moc tego zbioru $|A|$ nazwiemy liczbą i oznaczymy ją symbolem* $\mathbf{1}$.

Weźmy drugi zbiór jednoelementowy $B = \{b\}$ dla pewnego $b \neq a$, $b \in X$. Wtedy, ponieważ $A \cap B = \emptyset$, z faktu pokazanego na wykładzie 3 wynika, że moc zbioru $A \cup B$ jest różna od mocy zbioru A.

Definicja 1.2 *Moc zbioru $A \cup B$ nazwiemy liczbą następującą po liczbie* $\mathbf{1}$ *i oznaczymy ją przez* $\mathbf{2}$.

I ogólnie, jeśli A jest niepustym zbiorem skończonym, to moc zbioru $|A|$ będziemy nazywali *liczbą*, natomiast moc zbioru $\{c\} \cup A$, gdzie $c \notin A$ jest dowolnym elementem X, będziemy nazywali *liczbą następującą* po liczbie $|A|$.

Definicja 1.3 *Następnik liczby* $\mathbf{2}$ *oznaczymy przez* $\mathbf{3}$, *liczby* $\mathbf{3}$ *przez* $\mathbf{4}$, *liczby* $\mathbf{4}$ *przez* $\mathbf{5}$, *liczby* $\mathbf{5}$ *przez* $\mathbf{6}$, *liczby* $\mathbf{6}$ *przez* $\mathbf{7}$, *liczby* $\mathbf{7}$ *przez* $\mathbf{8}$, *liczby* $\mathbf{8}$ *przez* $\mathbf{9}$.

Uwaga 1.1 *Dalej symbol $j \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \mathbf{9}\}$ będziemy też nazywali cyfrą, o ile nie wspomnimy o nim jawnie, że oznacza liczbę, bądź w sytuacji kiedy użyjemy go w zapisie co najmniej dwukrotnie, pisząc np.* $\mathbf{23}$. *Umówimy się też, że zrezygnujemy z kroju bold na korzyść normalnego.*

Niech teraz X oznacza zbiór, którego elementami są wszystkie zbiory skończone. Gdyby X był zbiorem skończonym, to $X \in X$, co jest niemożliwe. Dlatego X jest zbiorem nieskończonym. Weźmy teraz zbiór $\mathbb{N}$ złożony z mocy wszystkich skończonych niepustych podzbiorów zbioru X.

Mamy więc

$$n \in \mathbb{N} \equiv \exists_{A \in X,\ A \neq \emptyset} \ \ n = |A|,$$

gdzie, jeśli dla liczb n, m odpowiadające im zbiory są jedakowo liczne (będziemy mówili *równoliczne*), to będziemy pisali $n = m$.

Zachodzi następujące twierdzenie

Twierdzenie 1.1 *(o zbiorze liczb naturalnych)*

1.

$$1 \in \mathbb{N},$$

2.

$$\forall_n \ n \in \mathbb{N} \Rightarrow n' \in \mathbb{N},$$

gdzie n' oznacza następnik n.

Dowód. Uzasadnienia wymaga tylko prawdziwość implikacji

$$n \in \mathbb{N} \to n' \in \mathbb{N}$$

dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$. W tym celu założymy, że zdanie $n \in \mathbb{N}$ jest prawdziwe. Pokażemy, że istnieje zbiór C, że $|C| = n'$. Z założenia dla pewnego zbioru skończonego A, $n = |A|$. Z definicji zbioru X istnieje zbiór B będący elementem zbioru X różnym od A. Ponieważ A i B są zbiorami, oznacza to, że dla tych zbiorów $A \neq B$. Możemy założyć, że $B \setminus A \neq \emptyset$. Niech $b \in B \setminus A$. Wtedy $|A \cup \{b\}|$ jest następnikiem n, co należało pokazać.

Dalej elementy zbioru $\mathbb{N}$ będziemy nazywali *liczbami naturalnymi*, zbiór $\mathbb{N}$– *zbiorem liczb naturalnych.*

Wniosek 1.1 *Zbiór $\mathbb{N}$ jest zbiorem nieskończonym.*

Dowód. Przypuśćmy, że $\mathbb{N}$ jest zbiorem skończonym. Z twierdzenia 1.1 wszystkie elementy zbioru $\mathbb{N}$ można wtedy uporządkować zaczynając od liczby 1 i biorąc kolejne następniki kolejnych liczb, co zapiszemy w postaci

$$1, 2, \ldots, n.$$

Z twierdzenia 1.1 n ma swój następnik n'. Z definicji następnika wynika, że $n' \notin \{1, 2, \ldots, n\}$, co oznacza, że założenie o zbiorze $\mathbb{N}$ jest fałszywe, co kończy dowód.

2 Zasada indukcji matematycznej

Dla $n \in \mathbb{N}$, niech $n+1$ oznacza następnik liczby n, czyli

$$n + 1 := n'.$$

Analogicznie przez $n-1$ oznaczmy liczbę naturalną, której następnikiem jest liczba n. Na mocy powyższego możemy wtedy napisać

$$(n-1) + 1 = n.$$

Dalej będziemy wielokrotnie wykorzystywali podstawowe twierdzenie o liczbach naturalnych zwane *zasadą indukcji matematycznej*

Twierdzenie 2.1 *(zasada indukcji matematycznej ZIM) Niech φ oznacza formę zdaniową określoną na $\mathbb{N}$. Wtedy*

$$\Big(\varphi(1) \wedge\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ (\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1))\Big) \Rightarrow\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ \varphi(n).$$

Uwaga 2.1 *ZIM ma swoją naturalną interpretację wynikającą z zabawy polegającej na układaniu kostek domina.*

Pokażemy jak ZIM można wykorzystać dla dowodu następującego faktu

Fakt 2.1 *Dla każdej liczby naturalnej $n \neq 1$ istnieje dokładnie jedna liczba $n-1$, którą będziemy nazywali poprzednikiem liczby n, czyli*

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ m + 1 = n \Rightarrow m = n - 1.$$

Dowód. Niech dla $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $\varphi(n)$ oznacza, że liczba n ma swój jedyny poprzednik. Z definicji wynika, że $\varphi(2)$, bowiem tylko $1+1=2$. Niech dla $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ zachodzi $\varphi(n)$, czyli n ma swój jedyny poprzednik. Pokażemy, że następnik $n+1$ liczby n też ma swój jedyny poprzednik. Z definicji n jest tym poprzednikiem. Gdyby istniał inny poprzednik $n+1$, powiedzmy m, to $m-1$ byłby poprzednikiem liczby n, co na mocy założenia oznacza, że $n-1 = m-1$. Z definicji poprzednika, oznacza to z kolei, że $n = m$, co jest niemożliwe. Zatem z ZIM każda liczba $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ma swój jedyny poprzednik.

Wniosek 2.1 *Dla każdej liczby naturalnej n istnieje dokładnie jeden jej następnik, czyli*

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ m - 1 = n \Rightarrow m = n + 1.$$

Wniosek 2.2 *Dla każdej liczby naturalnej n*

$$n = (\ldots((1+1)+1)\ldots+1),$$

gdzie w powyższym wzorze symbol $\ldots$ oznacza, że operacja następnika wykonana została n–krotnie.

3 Arytmetyka na liczbach naturalnych

Weźmy teraz dwie liczby naturalne n i m. Pokażemy, że liczbom tym odpowiada dokładnie jedna liczba naturalna s taka, że $s = |A \cup B|$, gdzie zbiory A, B są rozłączne oraz $n = |A|$, $m = |B|$. Wykorzystamy do tego ZIM. Najpierw ustalimy liczbę n. Zauważmy, że dla $m = 1$ powyższe zdanie jest prawdziwe. Weźmy teraz dowolne m i załóżmy, że również tak jest. Wykażemy, że tak będzie także dla następnika $m+1$. Niech $\tilde{s}$ oznacza liczbę określoną wyżej odpowiadającą liczbom n i $m+1$. Z definicji tej liczby wynika, że $\tilde{s}$ jest następnikiem liczby s, w takim razie z jednoznaczności $s+1 = \tilde{s}$. Wobec tego liczba s określona jest jednoznacznie na mocy ZIM dla każdej liczby m. Zamieniając rolami liczby n i m ze sobą i powtarzając powyższe rozumowanie dostajemy tezę.

Dalej będziemy pisali

$$s = n + m,$$

a liczbę s będziemy nazywali *sumą arytmetyczną* (lub krótko *sumą*), natomiast symbol $+$ *dodawaniem* liczb n i m.

Z definicji sumy oraz definicji następnika i ZIM dostajemy podstawowe twierdzenie o sumie

Twierdzenie 3.1 *(własności sumy arytmetycznej) Suma arytmetyczna ma następujące własności:*

1.

$$\forall_{n,m\in\mathbb{N}} \quad n+m = m+n \quad \textit{(przemienność dodawania)};$$

2.

$$\forall_{n,m,l\in\mathbb{N}} \quad (n+m)+l = m+(n+l) \quad \textit{(łączność dodawania)};$$

Niech n, m będą jak wyżej. Wtedy z zasady łączności jednoznacznie określona jest liczba naturalna l jako wynik działania

$$\underbrace{n+n+\ldots+n}_{m-\text{ razy}},$$

którą oznaczymy $n \cdot m$ i nazwiemy *iloczynem arytmetycznym* liczb n i m lub krótko *iloczynem*, natomist symbol $\cdot$ *iloczynem*. Dalej będziemy też pisali nm.

Wprost z definicji wynika, że iloczyn ma następujące własności:

Twierdzenie 3.2 *(o własności iloczynu)*

1.
$$\forall_{n \in \mathbb{N}}\ n1 = 1n = n \text{ (element neutralny)};$$

2.
$$\forall_{n,m \in \mathbb{N}}\ nm = mn \text{ (przemienność mnożenia)};$$

3.
$$\forall_{n,m,k \in \mathbb{N}}\ (nm)k = n(mk) \text{ (łączność mnożenia)};$$

4.
$$\forall_{n,m,k \in \mathbb{N}}\ (n+m)k = (nk)+(mk) \text{ (rozdzielność mnożenia względem dodawania)}.$$

Uwaga 3.1 *1. Zamiast nn będziemy pisali n^2 i ogólnie*
$$\underbrace{n \cdot \ldots \cdot n}_{k-razy}$$
będziemy nazywali potęgą i oznaczali n^k.

2. Będziemy potrzebowali jeszcze jednej liczby, którą oznaczymy przez $\mathbf{0}$*, gdzie z definicji* $\mathbf{0} = |\emptyset|$*.* $\mathbf{0}$ *będziemy rozumieli też w znaczeniu cyfra. Dalej będziemy używali kroju normalnego. Zauważmy, że z definicji wynika, że*
$$\forall_{n \in \mathbb{N}}\ n + 0 = 0 + n = n \text{ (neutralność)}.$$
Z definicji przyjmiemy, że
$$\forall_{n \in \mathbb{N}}\ n0 = 0n = 0.$$

3. Dla trzech liczb naturalnych n, m, k weźmy
$$l = (n+m)k,\ \tilde{l} = n + (mk).$$
Z zasady rozdzielności wynika, że l nie musi być równe $\tilde{l}$. Jeśli napiszemy $n + mk$, to należy przyjąć, że nie chodzi tutaj o zasadę rozdzielności, zatem $n + mk = \tilde{l}$. Zjawisko to nazywamy priorytetem kolejności wykonywania działań. Prirytet ten mówi, że dla mnożenia (zwanego też działaniem multiplikatywnym) jest on wyższy, aniżeli dla dodawania (działanie addytywne). W prtaktyce oznacza to, że pisanie nawiasu w sytuacji $n+(mk)$ jest zbędne.

4 Relacje na zbiorze $\mathbb{N}$

Powiemy, że na zbiorze $\mathbb{N}$ określona jest relacja $\mathcal{R}$, jeśli $\mathcal{R}$ jest podzbiorem iloczynu kartezjańskiego $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Wtedy dla dowolnych liczb naturalnych n, m będziemy pisali

$$n\mathcal{R}m \equiv \ (n, m) \in \mathcal{R}$$

i będziemy czytali *n jest w relacji $\mathcal{R}$ z m.*

Przykład 4.1 *Na $\mathbb{N}$ określona jest co najmniej jedna relacja–równości elementów, gdzie*

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \ n\mathcal{R}m \ \ \equiv \ \ n = m.$$

Definicja 4.1 *Powiemy, że relacja $\mathcal{R}$ na $\mathbb{N}$ jest:*

1. *zwrotna, jeśli*
$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \ n\mathcal{R}n,$$

2. *symetryczna, jeśli*
$$\forall_{n,m\in\mathbb{N}} \ n\mathcal{R}m \Rightarrow m\mathcal{R}n,$$

3. *antysymetryczna, jeśli*
$$\forall_{n,m\in\mathbb{N}} \ n\mathcal{R}m \ i \ m\mathcal{R}n \Rightarrow n = m,$$

4. *przechodnia, jeśli*
$$\forall_{n,m,k\in\mathbb{N}} \ n\mathcal{R}m \ i \ m\mathcal{R}k \Rightarrow n\mathcal{R}k.$$

Jasne jest, że równość elementów zbioru $\mathbb{N}$ jest przykładem relacji zwrotnej. Zdefiniujemy teraz drugą ważną relację na $\mathbb{N}$, oznaczaną symbolem $<$ i nazywaną relacją *mniejszości.*

$$\forall_{n,m\in\mathbb{N}} \ n < m \ \ \equiv \ \ \exists_{A,B\subset X, A\neq B, A\subset B} \ |A| = n, |B| = m.$$

Poniższy fakt wyjaśnia podstawowe własności tej relacji (dowód zostawiamy Czytelnikowi)

Fakt 4.1 *1.*

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \ n < n+1, \ \ n-1 < n, \ \ 0 < n; \ \ 1 < n \ lub \ n = 1,$$

2. *relacja ta ma własność trichotomii, czyli*

$$\forall_{n,m\in\mathbb{N}} \ n \neq m \Rightarrow (n < m \ lub \ m < n),$$

3. *$<$ jest relacją asymetryczną,*

4. *$<$ jest relacją przechodnią,*

5. *zachodzi dla niej zasada zgodności i skracania, czyli*

$$\forall_{n,m,k\in\mathbb{N}}\ n < m \Rightarrow n+k < m+k,$$

$$\forall_{n,m,k\in\mathbb{N}}\ n < m \Rightarrow nk < mk.$$

Każdą relację, która jest zwrotna, antysymetryczna i przechodnia nazywamy *częściowym porządkiem.* Jeśli dodatkowo relacja ma własność trichotomii, to nazywamy ją *relacją porządku* albo *relacją porządku liniowego.* Natomist relację, która jest zwrotna, symetryczna i przechodnia nazywamy *relacją równoważności.* Zauważmy, że relacja mniejszości nie jest relacją częściowego porządku (dlaczego?).

Biorąc teraz zdefiniowane wyżej relacje $=$ i $<$ zdefiniujemy relację trzecią, którą oznaczymy przez $\leq$, gdzie z definicji

$$\forall_{n,m\in\mathbb{N}}\ n \leq m \ \equiv\ n < m \text{ lub } n = m.$$

Wniosek 4.1 *Relacja $\leq$ jest relacją porządku. Mówimy też, że relacja ta porządkuje liniowo zbiór liczb $\mathbb{N}\cup\{0\}$.*

Wniosek powyższy ma swoją dobrze znaną interpretację geometryczną w postaci półprostej przedstawionej na rys.1.

Rysunek 1: geometryczna interpretacja zbioru $\mathbb{N}$

Dla liczb naturalnych zachodzi bardzo ważna własność

Twierdzenie 4.1 *(zasada podzielności) Dla dowolnych liczb naturalnych n, m istnieją takie liczby $w \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ oraz $r \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ że*

$$n = mw + r.$$

Co więcej, liczby w i r są jedyne o tej własności. Wtedy r nazywamy resztą z dzielenia n przez m.

Przykład 4.2 *Dla $n = 7$, $m = 3$ dostaniemy $7 = 2\cdot 3 + 1$.*

5 Notacja dziesiętna liczb naturalnych

Zauważyliśmy pewnie, że do tej pory posługiwaliśmy się tylko liczbami ze zbioru $\{0, 1, \ldots, 9\}$, a przecież zbiór wszystkich liczb naturalnych jest nieskończony. Pojawia się naturalna kwestia, w jaki sposób zapisać dowolną liczbę naturalną $n > 9$. Powiedzieliśmy też, że elementy zbioru $\{0, 1, \ldots, 9\}$ będziemy traktowali również jako cyfry, czyli znaki za pomocą, których będziemy mogli konstruować wyrażenia złożone.

Zaczniemy od następującej definicji

Definicja 5.1 *Słowem długości $k \geq 2$ nazywamy każdą sekwencję dowolnych cyfr*

$$c_k c_{k-1} \ldots c_1,$$

gdzie cyfra $c_k \in \{1, \ldots, 9\}$.

Następujące sekwencje: 21, 409, 1084 są przykładami słów. Potrzebujemy szczególnego słowa postaci 10, które będziemy czytali *dziesięć*. Z definicji przyjmiemy, że słowo to będzie kodowało liczbę będącą następnikiem liczby 9, co zapiszemy

$$10 \to 9 + 1.$$

Rozszerzymy teraz sposób kodowania aby różnym słowom odpowiadały różne liczby naturalne. W tym celu wystarczy powiedzieć jaka liczba odpowiada słowu $c_k c_{k-1} \ldots c_1$. Przyjmiemy, że

$$c_k c_{k-1} \ldots c_1 \to c_1 + c_2 10 + c_3 10^2 + \ldots + c_k 10^{k-1}.$$

W takim razie każde słowo koduje dokładnie jedną liczbę naturalną. Prawdziwe jest twierdzenie odwrotne

Twierdzenie 5.1 *(o reprezentacji dziesiętnej liczby naturalnej) Zbiór wszystkich słów (z uwzględnienim słów jednoelementowych) koduje wszystkie liczby naturalne. Dokładniej, każdej liczbie naturalnej odpowiada dokładnie jedno słowo, które ją koduje. O takiej liczbie mówimy wtedy, że jest liczbą k–cyfrową a system kodowania nazywamy systemem dziesiętnym.*

Przykład 5.1 *Powyższe twierdzenie mówi, że liczby naturalne możemy utożsamiać ze słowami. Zgodnie z przyjętą zasadą*

$$21 \to 1 + 2 \cdot 10,\ \ 409 \to 9 + 0 \cdot 10 + 4 \cdot 10^2,\ \ 1084 \to 4 + 8 \cdot 10 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^3.$$

Dalej zamiast pisać np. $21 \rightarrow 1 + 2 \cdot 10$, krótko będziemy pisali 21 traktując to słowo jako liczbę $1 + 2 \cdot 10$.

Nietrudno zauważyć (uzasadnienie zostawiamy Czytelnikowi), że

Fakt 5.1 *Dla każdej liczby $k \in \mathbb{N}$, liczby 10^k odpowiadają słowom postaci $10\ldots0$, gdzie cyfra 0 powtarza się k–razy. Wtedy $10^2 = 100$ i czytamy "sto", $10^3 = 1000$ i czytamy "tysiąc".*

Pozostaje do wyjaśnienia jeszcze jedna kwestia. Skoro liczbę będziemy zastępowali słowem, jak będzie przebiegała arytmetyka na liczbach w ten sposób reprezentowanych. Wyjaśniają to dwa kolejne fakty.

Fakt 5.2 *(o dodawaniu słów) Niech dane będą dwie liczby wyreprezentowane w systemie dziesiętnym*

$$n = c_k c_{k-1} \ldots c_2 c_1, \; m = d_s d_{s-1} \ldots d_2 d_1.$$

Wtedy liczba $n + m$ ma reprezentację $w_l w_{l-1} \ldots w_2 w_1$, gdzie

1. $$w_1 = c_1 + d_1, \text{ o ile } c_1 + d_1 \leq 9,$$

   w przeciwnym razie–mówimy wtedy o zjawisku przepełnienia, w_1 jest ostatnią cyfrą z reprezentacji sumy $c_1 + d_1$.

2. *Wówczas kolejna cyfra w_2 w rozważanej wyżej sytuacji pierwszej powstaje z cyfr c_2, d_2 (jeśli $k, s \geq 2$) według tej samej zasady. W sytuacji drugiej (mamy przepełnienie) powiększana jest o 1 (suma poprzednich cyfr ≤ 19).*

3. *Przypuśćmy, że $k > s$. Wtedy wszystkie cyfry $w_1, \ldots, w_s$ powstają według zasad opisanych w (1) i (2). Kolejne cyfry liczby wynikowej są odpowiednio albo równe kolejnej cyfrze liczby n, albo w przypadku przepełnienia powiększane są o 1 z uwzględnieniem być może kolejnego efektu przepełnienia. Zatem w tej sytuacji $l = k$ lub $l = k + 1$.*

4. *Jeśli $k = s$, to przy braku przepełnienia w przypadku wyliczania ostatniej cyfry $l = k$ i $w_l = c_l + d_l$. W przeciwnym razie długość słowa liczby wynikowej zwiększy się o 1 i zawsze $w_{l+1} = 1$.*

Dla przykładu weźmy przypadek pierwszy, czyli 2072+54. Zgodnie z powyższym faktem dostaniemy słowo wynikowe długości 4 postaci $w_4 w_3 w_2 w_1$, gdzie kolejno

$$w_1 = 4 + 2 = 6 \text{ (brak przepełnienia,)}$$

$$w_2 = 2 \text{ (efekt przepełnienia, } 5 + 7 = 12),$$

$$w_3 = 0 + 1 \text{ (uwzględnienie wcześniejszego przepełnienia, brak bieżącego,)}$$

$$w_4 = 2 \text{ (słowa o różnej długości)}$$

co daje $2072 + 54 = 2126$.

Dodamy teraz słowa o tej samej długości, np. $125 + 286$. Zgodnie z zasadą opisaną w powyższym fakcie otrzymamy słowo długości co najmniej 3, gdzie

$$w_1 = 1 \text{ (efekt przepełnienia, } 6 + 5 = 11),$$

$$w_2 = 1 \text{ (efekt wcześniejszego przepełnienia i bieżącego, } 2 + 8 + 1 = 11),$$

$$w_3 = 1 + 2 + 1 = 4 \text{ (efekt wcześniejszego przepełnienia,)}$$

co daje $125 + 286 = 411$.

Obie procedury można przedstawić prościej, co przedstawiają poniższe sytuacje:

$$\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 7 & 2 \\ & & 5 & 4 \\ \hline \\ 2 & 1 & 2 & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 8 & 6 \\ \hline \\ 4 & 1 & 1 \end{array}$$

Zajmiemy się teraz problemem mnożenia liczb zapisanych w układzie dziesiętnym. Zasadę takiego mnożenia tłumaczy kolejny fakt

Fakt 5.3 *Niech dane będą dwie liczby wyreprezentowane w systemie dziesiętnym*

$$n = c_k c_{k-1} \dots c_2 c_1, \; m = d_s d_{s-1} \dots d_2 d_1.$$

Wtedy iloczyn tych liczb nm ma reprezentację $w_l w_{l-1} \dots w_2 w_1$ wynikającą z zasady rozdzielności mnożenia względem dodawania. Oznacza to, że kolejne cyfry zapisu dziesiętnego liczby nm biorą się z mnożenia przez siebie cyfr liczb n oraz m z uwzględnieniem zasady przepełnienia, a następnie ich dodawania, również z uwzględnienim tej zasady.

Poniższy przykład reprezentuje praktyczny sposób realizacji zasady opisanej w powyższym fakcie, gdzie pod pierwszą kreską znajdują się wyniki mnożenia liczby 262 kolejno przez liczbę 7 i 6, pod drugą kreską–suma tak otrzymanych liczb.

$$\begin{array}{r}
2\;5\;2 \\
6\;7 \\
\hline
1\;7\;6\;4 \\
1\;5\;1\;2\;\;\; \\
\hline
1\;6\;8\;8\;4
\end{array}$$

Uwaga 5.1 *Mnożenie liczby* $n = c_k c_{k-1} \ldots c_2 c_1$ *przez liczbę* 10^k *polega na tym, że wynik końcowy zapisuje się w postaci* $c_k c_{k-1} \ldots c_2 c_1 \underbrace{0 \ldots 0}_{k-razy}$. *Uzasadnienie tego faktu pozostawiamy Czytelnikowi.*