Podstawy kształcenia matematycznego
Wykład 5
Relacje, ich własności i zastosowania
17 marca 2010

1 Pojęcie relacji

O relacji mówiliśmy już w czasie wykładu 4–wprowadziliśmy tam pojęcie relacji na zbiorze liczb naturalnych. Zauważyliśmy, że znane wszystkim symbole: $=$, $<$, $\leq$ stanowią przykłady relacji. Teraz spojrzymy na pojęcie relacji bardziej ogólnie. Niech jak wcześniej X oznacza zbiór uniwersalny, A, B jego niepuste podzbiory.

Definicja 1.1 *Każdy podzbiór niepusty $\mathcal{R}$ iloczynu kartezjańskiego $A \times B$ nazywamy relacją określoną w zbiorze A o wartościach w zbiorze B. Wtedy fakt, że $(a, b) \in \mathcal{R}$ będziemy oznaczali też $a\mathcal{R}b$ i będziemy mówili, że a jest w relacji $\mathcal{R}$ z b.*

Przykład 1.1 *Niech $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4\}$ oraz weźmy zbiór*

$$\{(1, 2), (1, 4), (2, 4)\}.$$

Zauważmy, że zbiór ten jest podzbiorem iloczynu $A \times B$. Mamy więc do czynienia z relacją $\mathcal{R}$. Zauważmy, że $1\mathcal{R}2$, $1\mathcal{R}4$, $2\mathcal{R}4$, natomiast element 3 zbioru A nie jest w relacji $\mathcal{R}$ z żadnym elementem zbioru B. Z drugiej strony element 1 jest w relacji z elementem 2 i 4 zbioru B.

Dalej wygodniej będzie założyć, że jeśli $\mathcal{R} \subset A \times B$, to dla każdego $a \in A$ istnieje co najmniej jeden element $b \in B$, że $a\mathcal{R}b$. W takim przypadku będziemy mówili, że relacja $\mathcal{R}$ określona jest *na* zbiorze A. W szczególności, jeśli $A = B$, to będziemy krótko mówili o relacji określonej na zbiorze A.

Przykład 1.2 *Przypuśćmy, że mamy zbiór skończony A mocy $n \geq 2$ i z jakiś powodów chcielibyśmy jego elementy uporządkować. Jedna z metod polega na tym, że należy wziąć zbiór $P = \{1, 2, \ldots, n\}$ po to aby na zbiorze $P \times A$ określić relację $\mathcal{R}$:*

$$\forall_{k \in P}\ \exists!_{a \in A}\ k\mathcal{R}a.$$

Ponieważ zbiory P i A są równoliczne relacja $\mathcal{R}$ określona jest poprawnie. Zauważmy, że wtedy element będący w relacji z k możemy oznaczyć przez a_k.

Dostaniemy wtedy

$$\forall_{k \in P}\ k\mathcal{R}a_k \text{ oraz } A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}.$$

Efekt uporządkowania elementów zbioru A nazywamy wtedy ciągiem, co zapisujemy $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Przykład 1.3 *Przypuśćmy, że w urnie znajduje się pewna ilość różnokolorowych kul. Traktując zawartość tej urny jako zbiór A, zdefiniujemy na tym zbiorze relację, która dzięki swoim własnościom (zajmiemy się tymi własnościami dalej) pozwoli nam na skategoryzowanie tych kul. Dokładniej, powiemy, że dwie kule k, k' są w relacji $\mathcal{R}$, jeśli są tego samego koloru. Dla ustalonej kuli k weźmy zbiór złożony ze wszystkich kul, z którymi jest ona w relacji. Jasne jest, że zbiór ten składa się ze wszystkich kul jednakowego koloru. W ten sposób za pomocą zdefiniowanej relacji dokonaliśmy podziału zbioru A na parami rozłączne podzbiory, które w sumie dają A.*

Przykład 1.4 *Niech X oznacza zbiór, którym posługiwaliśmy się w czasie wykładu 4–zbiór, którego elementami są wszystkie skończone zbiory. Na X definiujemy relację*

$$\forall_{A,B \in X}\ A\mathcal{R}B \ \equiv A \subset B.$$

Zauważmy, że:

1. *nie każde dwa elementy zbioru X są ze zobą w relacji $\mathcal{R}$ (dlaczego?),*
2. *jeśli $A \neq B$ i $A\mathcal{R}B$, to $\neg(B\mathcal{R}A)$ (dlaczego?).*

W sytuacji drugiej mamy do czynienia wyraźnie z asymetrią–spośród dwóch elementów A, B jeden z nich jest wyróżniony. Możemy na przykład powiedzieć, że B jest "większy" od A. Zauważmy, że z podobną sytuacją mieliśmy już do czynienia wcześniej(kiedy?).

Przykład 1.5 *Niech A oznacza zbiór wszystkich trójkątów na płaszczyźnie. Dla trójkąta T niech liczby a_T, b_T, c_T oznaczają długości jego boków. Powiemy, że trójkąt T jest w relacji $\mathcal{R}$ z trójkątem T', jeśli dla a_T, b_T, c_T można dobrać takie długości boków $a_{T'}, b_{T'}, c_{T'}$ trójkąta T', że $a_T = k \cdot a_{T'}$, $b_T = k \cdot b_{T'}$, $c_T = k \cdot c_{T'}$ dla pewnej liczby k. Zauważmy, że realcja ta ma następujące własności(dlaczego?):*

$$T\mathcal{R}T, \quad T\mathcal{R}T' \Rightarrow T'\mathcal{R}T$$

oraz dla trzech trójkątów T, T', T''

$$T\mathcal{R}T' \text{ i } T'\mathcal{R}T'', \text{ to } T\mathcal{R}T''.$$

2 Rodzaje relacji

Zwrócimy teraz uwagę na własności relacji zdefiniowanych w przykładach 1.2–1.5.

Definicja 2.1 *Niech dana będzie relacja $\mathcal{R}$ na zbiorze A. Powiemy, że taka relacja jest:*

1. *zwrotna, jeśli*
$$\forall_{a\in A}\ a\mathcal{R}a,$$
2. *symetryczna, jeśli*
$$\forall_{a,b\in A}\ a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a,$$
3. *antysymetryczna, jeśli*
$$\forall_{a,b\in A}\ a\mathcal{R}b \text{ i } b\mathcal{R}a \Rightarrow a = b,$$
4. *przechodnia, jeśli*
$$\forall_{a,b,c\in A}\ a\mathcal{R}b \text{ i } b\mathcal{R}c \Rightarrow a\mathcal{R}c.$$

Relacja równości elementów zbioru jest przykładem relacji zwrotnej. Z kolei relacja $<$ na zbiorze liczb naturalnych nie jest zwrotna. Jest natomiast przechodnia, ale nie jest symetryczna. Nie każda relacja musi być przechodnia, co pokazują liczne przykłady (podać taki przykład). Jeśli relacja $\mathcal{R}$ jest asymetryczna i $a \neq b$, to z tego, że $a\mathcal{R}b$ wynika, że $\neg(b\mathcal{R}a)$, co widzieliśmy w przykładzie 1.4.

Definicja 2.2 *Każda relację $\mathcal{R} \subset A \times B$ taką, że*
$$\forall_{a\in A}\ \exists!_{b\in B}\ a\mathcal{R}b,$$
nazywamy funkcją (odwzorowaniem, przekształceniem, transformacją) określoną na zbiorze A i o wartościach w zbiorze B. Wtedy A nazywamy dziedziną tej funkcji, elementy dziedziny–jej argumentami. Piszemy też
$$b = \mathcal{R}(a),\ \textit{zamiast } a\mathcal{R}b$$
oraz
$$\mathcal{R}\colon\ A \to B,\ \textit{zamiast } \mathcal{R} \subset A \times B.$$
Dalej takie relacje, czyli funkcje, będziemy oznaczali literami f, g itp.

Fakt 2.1 *Niech f oznacza przyporządkowanie określone pomiędzy elementami zbioru A a elementami zbioru B takie, że każdemu elementowi $a \in A$ odpowiada dokładnie jeden element $b \in B$, który oznaczamy $b = f(a)$, co zapisujemy*

$$A \ni a \longrightarrow b = f(a) \in B.$$

Wtedy istnieje dokładnie jedna relacja $\mathcal{R} \subset A \times B$, że

$$\forall_{a \in A, b \in B}\ a\mathcal{R}b \equiv \quad b = f(a).$$

Dokładniej, wykres funkcji f, $graf(f) = \{(a, b) \in A \times B\colon\ b = f(a)\}$ jest wtedy tą relacją.

Definicja 2.3 *Każda relacja zwrotna, symetryczna i przchodnia nazywa się relacją równoważności. O relacji, która jest zwrotna, antysymetryczna i przechodnia powiemy, że jest częściowym porządkiem. Jeśli dla częściowego porządku $\mathcal{R}$ na A spełniony jest warunek*

$$\forall_{a,b \in A}\ a\mathcal{R}b,$$

to powiemy, że $\mathcal{R}$ jest porządkiem.

W dalszej części wykładu zajmiemy się bliżej relacjami, które odpowiednio mają własności: są funkcjami, są relacjami równoważności, są częściowym porządkiem i porządkiem.

3 Funkcja jako przykład relacji

W definicji 2.2 zwróciliśmy uwagę, że funkcja jest szczególnym przypadkiem relacji. Niech dana będzie funkcja $f\colon A \to B$. Jeśli różnym argumentom odpowiadają różne wartości funkcji, czyli

$$\forall_{a,b\in A}\ a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b),$$

to będziemy mówili, że f jest *różnowartościowa*. Jeśli dodatkowo B jest *zbiorem wartości* funkcji, a więc

$$B = \{b \in B\colon\ \exists_{a\in A}\ b = f(a)\},$$

to powiemy, że f jest *bijekcją*.

Możemy teraz wrócić do pojęcia równoliczności zbiorów i mocy zbioru.

Twierdzenie 3.1 *(o równoliczności zbiorów) Dwa zbiory skończone A i B są równoliczne wtedy i tylko wtedy gdy istnieje bijekcja pomiędzy nimi.*

Dowód. Załóżmy, że zbiory A i B są równoliczne. Wtedy istnieje liczba naturalna n, że $|A| = |B| = n$. Powtarzają rozumowanie z przykładu 1.2 na zbiorze $\{1, 2, \ldots, n\}$ możemy zdefiniować dwie funkcje f, g o wartościach odpowiednio w zbiorze A i B takie, że

$$\forall_{k\in\{1,2,\ldots,n\}}\ a_k = f(k),\ b_k = g(k),\ A = \{a_1, \ldots, a_n\},\ B = \{b_1, \ldots, b_n\}.$$

Z zasady konstrukcji funkcji f, g wynika, że są to bijekcje. Niech f^{-1} oznacza relację odwrotną do f, czyli

$$\forall_{a\in A,\ k\in\{1,2,\ldots,n\}}\ af^{-1}k \ \equiv\ k = f^{-1}(a) \ \equiv\ f(k) = a.$$

Zauważmy, że relacja ta jest funkcją, która jest bijekcją i $f^{-1}\colon A \to \{1, 2, \ldots, n\}$.

Definiujemy odwzorowanie $h\colon A \to B$, gdzie

$$\forall_{a\in A}\ h(a) = g(f^{-1}(a)) = g(k) = b,\ \text{gdzie } k = f^{-1}(a).$$

Zauważmy, że h jest bijekcją (dlaczego?), co właśnie należało pokazać.

Na odwrót, niech $f\colon A \to B$ będzie bijekcją na zbiorach skończonych A i B. Oznaczmy przez n moc zbioru A. Z definicji bijekcji wynika, że

$$n = |A| = |\{b \in B\colon\ \exists_{a\in A}\ b = f(a)\}| = |B|,$$

co kończy dowód twierdzenia.

W dalszej części wykładu pokażemy, że na równoliczność możemy spojrzeć jak na relację równoważności. Teraz zwrócimy uwagę na jeszcze dwa ważne zastosowanie funkcji–na pojęcie ciągu i działania.

Niech $\mathbb{N}_o$ oznacza niepusty podzbiór zbioru liczb naturalnych, A ustalony podzbiór X. Każdą funkcję

$$f\colon \mathbb{N}_o \to A$$

nazywamy *ciągiem* o wartościach w zbiorze A. Wtedy $f(k)$ oznaczamy przez a_k i nazywamy k–tym *wyrazem* tego ciągu, który oznaczamy przez $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_o}$.
W szczególności, jeśli $\mathbb{N}_o$ jest skończonym podzbiorem, to ciąg $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_o}$ nazywamy *ciągiem skończonym*.

Przykład 3.1 *Przypuśćmy, że A ma moc równą n. Jak wiemy wtedy zbiór A możemy przedstawić następująco*

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

Możemy wtedy mówić o a_k jako o "elemencie zbioru A". Z drugiej strony elementy tego zbioru możemy uporządkować wykorzystując do tego pojęcie ciągu– biorąc ciąg skończony $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Wtedy a_k jest "k–tym wyrazem" ciągu (a_k).

W wykładzie 4, na przykładzie zbioru liczb naturalnych, wprowadziliśmy pojęcie działania na zbiorze (dodawania i mnożenia). Spojrzymy na to zagadnienie jeszcze raz–z abstrakcyjnego punktu widzenia. W tym celu weźmy zbiór A. Powiemy, że na A zdefiniowane jest *dwuargumentowe działanie*, jeśli dana jest funkcja

$$f\colon A \times A \to A.$$

Wtedy element zbiory A, $f(a, b)$ będziemy nazywali *wynikiem* działania f na elementach a, b. O działaniu f powiemy, że:

1. jest *przemienne*, jeśli
$$\forall_{a,b\in A}\ f(a, b) = f(b, a),$$
2. jest *łączne*, jeśli
$$\forall_{a,b,c\in A}\ f(f(a, b), c) = f(a, f(b, c)),$$
3. ma *element neutralny*, jeśli
$$\forall_{a\in A}\ f(a, e) = f(e, a) = a, \text{ dla pewnego } e \in A.$$

Przykład 3.2 *Symbole $+, \cdot$ użyte w wykładzie 4 są przykładami działań na zbiorze $\mathbb{N}$. Symbole $\cup, \cap$ użyte w wykładzie 3 oznaczały działania na zbiorze, którego elementami są zbiory. Symbole $\vee, \wedge$ użyte w wykładzie 2 oznaczały działania na zbiorze zdań. Z dotychczasowych wykładów dobrze wiadomo, że działania te mają powyższe własności* (1)–(3).

4 Relacja równoważności

Dale będziemy potrzebowali pojęcia partycji. Będziemy mówili, że $\mathcal{P}$ jest *partycją* zbioru X, jeśli $\mathcal{P} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, gdzie zbiory $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są *parami rozłączne*, czyli $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$ oraz $X = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$.

Sformułujemy teraz podstawowe twierdzenie o relacji równoważności.

Twierdzenie 4.1 *(zasada abstrakcji) Niech $\mathcal{R}$ będzie relacją równoważności na zbiorze A (niekoniecznie skończonym). Dla każdego elementu $a \in A$ niech $[a]_\mathcal{R}$ oznacza podzbiór zbioru A złożony z tych elementów, z którymi a jest w relacji $\mathcal{R}$. Dalej zbiór ten będziemy nazywali klasą abstrakcji elementu a. Wtedy:*

1. $$a \in [a]_\mathcal{R},$$

2. $$[a]_\mathcal{R} = [b]_\mathcal{R} \equiv a\mathcal{R}b,$$

3. $$[a]_\mathcal{R} \neq [b]_\mathcal{R} \equiv [a]_\mathcal{R} \cap [b]_\mathcal{R} = \emptyset.$$

W szczególności dla relacji równoważności z klas jej abstrakcji można uzyskać partycję. Na odwrót, dla każdej partycji $\mathcal{P}$ zbioru skończonego A istnieje relacja równoważności $\mathcal{R}$ na A, że każda jej klasa abstrakcji jest pewnym elementem tej partycji.

Dowód. Niech $\mathcal{R}$ oznacza relację równoważności na zbiorze A. Warunek $a \in [a]_\mathcal{R}$ jest konsekwencją własności zwrotności tej relacji ($a\mathcal{R}a$). Dla dowodu warunku (2) niech $[a]_\mathcal{R} = [b]_\mathcal{R}$. Z (1) wtedy $a \in [b]_\mathcal{R}$, co z definicji klasy abstrakcji oznacza, że $a\mathcal{R}b$. Jeśli $a\mathcal{R}b$ i $c \in [a]_\mathcal{R}$, to z symetrii i założenia $c\mathcal{R}a$ i $a\mathcal{R}b$. Dlatego z przechodniości relacji $a\mathcal{R}c$, co dowodzi, że $[a]_\mathcal{R} \subset [b]_\mathcal{R}$. Podobnie pokazujemy przeciwne zawieranie, co dowodzi (2). Dla dowodu (3) zauważmy $[a]_\mathcal{R} \cap [b]_\mathcal{R} \neq \emptyset$ oznacza, że $c \in [a]_\mathcal{R} \cap [b]_\mathcal{R}$ dla pewnego $c \in A$. Ale wtedy, jak pokazaliśmy wcześniej, $a\mathcal{R}b$, czyli $[a]_\mathcal{R} = [b]_\mathcal{R}$. Biorąc teraz $[a]_\mathcal{R}$ dla $a \in A$ dostajemy zbiory, które dla pewnych a są albo jednakowe albo parami rozłączne (własność (3)). Ponadto ich suma z własności (1) daje A, co jest jasne w przypadku kiedy zbiór ten jest skończony. Klasy abstrakcji dają więc partycję zbioru A.
Na odwrót niech $\mathcal{P}$ oznacza partcję zbioru A. Na A definiujemy relację

$$a\mathcal{R}b \equiv \; a, b \in P \text{ dla pewnego elementu } P \text{ partycji } \mathcal{P}.$$

Czytelnikowi zostawiamy sprawdzenie, że $\mathcal{R}$ jest relacją równoważności i warunku, że

$$\forall_{P \in \mathcal{P}} \; a \in P \;\equiv\; [a]_{\mathcal{R}} = P,$$

co kończy dowód twierdzenia.

Niech elementami zbioru X będą teraz wszystkie zbiory skończone. Na X definiujemy relację

$$A\mathcal{R}B \;\equiv A \text{ jest równoliczny } B.$$

Wykorzystując rozumowanie przedstawione w dowodzie twierdzenia 3.1 można pokazać (zostawiamy to Czytelnikowi), że relacja ta jest relacją równoważności. W takim razie, zgodnie z zasadą abstrakcji zbiór X możemy podzielić na rozłączne podzbiory. Każdy taki podzbiór, oznaczmy go przez $\mathcal{X}_n$, składa się ze wszystkich skończonych zbiorów mocy n, dla $n \in \mathbb{N}$, czyli wszystkich zbiorów równolicznych sobie. Tę klasę abstrakcji w matematyce nazywa się *liczbą kardynalną*.

Przykład 4.1 *Dla danej liczby naturalnej $p \geq 2$, niech $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$. Definiujemy funkcję*

$$r_p \colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_p,$$

gdzie $r_p(n)$ oznacza resztę z dzielenia liczby n przez p, czyli (patrz wykład 4)

$$n = kn + r_p(n), \text{ gdzie } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \; r_p(n) \in \mathbb{Z}_p.$$

Na $\mathbb{N}$ definiujemy relację $\mathcal{R}$

$$n\mathcal{R}m \equiv r_p(n) = r_p(m).$$

Czytelnikowi zostawiamy do wykazania, że $\mathcal{R}$ jest relacją równoważności.
W takim razie zbiór liczb naturalnych możemy podzielić klasami abstrakcji tej relacji. Ustalmy liczbę naturalną n i $p \geq 2$. Znajdziemy opis klasy $[n]_{\mathcal{R}}$. Jeśli $m \in [n]_{\mathcal{R}}$, to z zasady podzielności i założenia, że $n\mathcal{R}m$ dostaniemy

$$m = k_m p + r_p(m) = k_m p + r_p(n),$$

dla pewnej liczby naturalnej k_m. Na odwrót, biorąc liczbę $m = kp + r_p(n)$ dla dowolnej liczby $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, widzimy, że $n\mathcal{R}m$, bowiem $r_p(n) = r_p(m)$. Dlatego

$$[n]_{\mathcal{R}} = \{kp + r_p(n) \colon \; k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Na przykład, biorąc $p = 2$, dla $n = 5$ dostaniemy

$$[5]_{\mathcal{R}} = \{5k + 1 \colon \; k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}, \text{ bowiem } r_2(5) = 1.$$

Jeśli na elementy klasy abstrakcji $[n]_{\mathcal{R}}$ spojrzymy jak na kolejne wyrazy ciągu, to otrzymamy ciąg $(kp + r_p(n))_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$, który w matematyce nazywamy ciągiem arytmetycznym.

5 Relacja częściowego porządku i porządku

O częściowym porządku i o porządku mówiliśmy już w ramach wykłady 4. Zauważyliśmy tam, że zbiór liczb naturalnych jest uporządkowany oraz zjawisko to ma swoją interpretację geometryczną. Relację częściowego porządku na zbiorze A oznaczymy dalej przez $\preceq$.

Definicja 5.1 *Powiemy, że w zbiorze częściowo uporządkowanym istnieje element maksymalny c, jeśli*

$$\forall_{a \in A}\ c \preceq a \Rightarrow c = a$$

Podobnie powiemy, że $d \in A$ jest elementem minimalnym, jeśli

$$\forall_{a \in A}\ a \preceq d \Rightarrow d = a.$$

Przykład 5.1 *Przypuśćmy, że obserwujemy trzy kolejki klientów do trzech różnych kas. W każdej z kolejek wprowadzamy relację:*

$$k \preceq l \equiv \text{ klienci } k, l \text{ stoją w tej samej kolejce i klient } l \text{ znajduje się bliżej kasy.}$$

Zauważmy, że tak zdefiniowana relacja jest relacją częściowego porządku na zbiorze wszystkich klientów, którzy ustawili się do tych trzech kas (dlaczego?). Ponadto dla każdych dwóch klientów ustawionych w różnych kolejkach, klienci ci nie są ze sobą w tej relacji. Z tego powodu wśród osób stojących w kolejce do jednej z tych trzech kas nie istnieje taka, powiedzmy k, że $\forall_l\ l \preceq k$. Z drugiej strony, każda osoba, która jest aktualnie przy kasie (są dokładnie trzy) jest elementem maksymalnym dla tej relacji. Podobnie każda osoba, która znajduje się na końcu każdej z kolejek–elementem minimalnym.

Pokażemy teraz dwa podstawowe twierdzenia o porządku i częściowym porządku.

Twierdzenie 5.1 *(o porządku)*
Każdy niepusty zbiór skończony można uporządkować.

Dowód. Z twierdzenia 3.1 wiadomo, że jeśli $|A| = n$, to istnieje bijekcja

$$f : \{1, 2, \ldots, n\} \to A.$$

Na zbiorze $\{1, 2, \ldots, n\}$ bierzemy relację $\leq$, która jak wiemy jest częściowym porządkiem. Za pomocą bijekcji f zdefiniujemy relację $\preceq$ na zbiorze A

$$\forall_{a,b \in A}\ a \preceq b \ \equiv\ i \leq j, \text{ gdzie } a = f(i),\ b = f(j).$$

Dla dowodu twierdzenia wystarczy wykazać, że $\preceq$ jest relacją porządku, co zostawiamy Czytelnikowi.

Twierdzenie 5.2 *W każdym niepustym skończonym zbiorze A z relacją porządku $\preceq$ istnieją dwa elementy a, b, że*

$$\forall_{c\in A}\ a \preceq c \preceq b.$$

Wtedy a nazywamy elementem najmniejszym, b elementem największym w tym zbiorze.

Dowód. Z twierdzenia 5.1 wynika, że na zbiorze A istnieje co najmniej jedna relacja $\preceq$, która go porządkuje. Pozostałą część tezy można udowodnić wykorzystując ZIM, co zostawiamy Czytelnikowi.

Wprost z definicji relacji porządku wynika, że (dlaczego?)

Wniosek 5.1 *Elementy najmnieszy i największy wyznaczone są jednoznacznie.*

Na koniec podamy twierdzenie będące abstrakcyjnym odpowiednikiem sytuacji opisanej w przykładzie 5.1. Jest to szczególna wersja słynnego *lematu Kuratowskiego–Zorna.*

Twierdzenie 5.3 *(o częściowym porządku)*
W każdym skończonym zbiorze częściowo uporządkowanym istnieje co najmniej jeden element minimalny i maksymalny.

6 Ćwiczenia i problemy

Zadanie 6.0.1 *Rozwiązać wszystkie problemy zasygnalizowane w trści wykładu.*

Zadanie 6.0.2 *Dane są dwa zbiory: A–zbiór uczniów, B–zbiór ocen. Zaproponować różne relacje na zbiorze $A \times B$.*

Zadanie 6.0.3 *Dane są trzy zbiory: A–zbiór artykułów, B–zbiór klientów marketu, C–zbiór cen. Opisać możliwe relacje na tych zbiorach towarzyszące procesowi zakupów.*

Zadanie 6.0.4 *Dany jest ciąg liczbowy (a, a, b, a, a, a). Zapisać ten ciąg za pomocą notacji teorii funkcji. Przedstawić tę funkcję jako relację.*

Zadanie 6.0.5 *Opisać zjawisko usadowienia grupy osób w sali za pomocą pojęcia relacji.*

Zadanie 6.0.6 *Uzasadnić, że A nie jest zbiorem skończonym wtedy i tylko wtedy gdy A jest równoliczny z $A \setminus \{a\}$, dla $a \in A$.*

Zadanie 6.0.7 *Z zasady podzielności wiadomo, że dla dowolnych dwóch liczb naturalnych n, m istnieją jedyne liczby $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ oraz $r \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, że $n = km + r$. Jeśli $r = 0$, to będziemy mówili, że m dzieli n. Jeśli 2 dzieli n, to taką liczbę naturalną nazywamy parzystą. Zaproponować relację na zbiorze $\mathbb{N}$, dla której zbiór wszystkich liczb parzystych jest jej klasą abstrakcji.*