Podstawy kształcenia matematycznego
Wykład 6
Wprowadzenie do geometrii część I
26 kwietnia 2010

1 Wprowadzenie

Geometria jest tą dziedziną matematyki na przykładzie, której najlepiej widać *aksjomatyczną* konstrukcję teorii matematycznej. Najciekawsze jest to, że już w chwili jej powstania miała postać zaksjomatyzowaną. Tymczasem druga sfera zainteresowań matematycznych człowieka–teoria liczb doczekała się swojej aksjomatyzacji dopiero na przełomie XIX i XX wieku, z nastaniem współczesnej *teorii mnogości* Cantora. Co to może oznaczać? Tylko jedno–geometria jest nauką bardzo abstrakcyjną i tak musi być odbierana, co wcale nie stoi w sprzeczności ze stwierdzeniem, że mimo wszystko jest nauką bardzo intuicyjną. Przecież większość z nas nie ma problemu ze zrozumieniem takich pojęć jak: *punkt, prosta, płaszczyzna.* Ale kto widział te obiekty? Jeśli widzieliśmy punkty, to tylko w fizycznym tego słowa znaczeniu, na pewno nie w znaczeniu geometrycznym. Prostej na pewno nie widzieliśmy i nigdy nie zobaczymy–postrzegamy bowiem tylko fragment czegoś co nazywamy prostą. Podobnie jest z płaszczyzną. Nie mamy problemów też z akceptacją stwierdzenia, że *dwie proste równoległe i różne nie przecinają się.* Jak to możliwe, skoro nigdy nie zaobserwujemy takiego zjawiska? Rozsądna odpowiedź jest jedna: u podstaw naszej wyobraźni i rozumowania leży pogląd, że skoro nie ma podstaw twierdzić, że takie proste nie przetną się (bo widzimy wycinek tego zjawiska), to przyjmujemy to za prawdę. Tymczasem współczesna fizyka wyjaśnia, że jest inaczej! *Ogólna teoria wzglzględności* Einsteina przewiduje, że takie proste muszą przecinać się. Zatem z tą intuicją niestety nie jest do końca tak dobrze. W takim razie o co tutaj chodzi?

Odpowiedź jest dość złożona. Z jednej strony można bowiem mówić o jednej geometrii, tzw. *geometrii absolutnej*, z drugiej strony wyróżnia się *geometrię euklidesową*, sformułowaną ok. 300 r.p.n.e przez Euklidesa w słynnym dziele *Elementy* i obowiązującą, jako jedyna do końca XIX wieku oraz *geometrię nieeuklidesową*, powstałą w połowie XIX w., sformułowaną niezależnie przez matematyka rosyjskiego Łobaczewskiego i węgierskiego Bolyai'a, a następnie uogólnioną przez Riemanna. Chodzi o to, że obie geometrie opierają się na wspólnym zbiorze aksjomatów, z których można wyprowadzić każdą z tych geometrii, ale też różnią się i to bardzo. Obie teorie są prawdziwe, jako niesprzeczne, ale prowadzą do różnych, bo wykluczających się wniosków. Jest to możliwe, bowiem pomimo, że posiadają wspólne zbiory aksjomatów, to jednak wyprowadzone są ze zbiorów różnych.

Nasz wykład oprzemy na klasycznym zbiorze aksjomatów, czyli pochodzących od Euklidesa. Zaczniemy od sformułowania kilku podstawowych pojęć.

2 Pojęcia pierwotne geometrii

Dany będzie niepusty zbiór $\mathbf{S}$. Elementy tego zbioru będziemy oznaczali a, b, c itd. i nazywali *punktami*. Zbiór $\mathbf{S}$ nazwiemy *przestrzenią*. Dlatego o tym, że $a \in \mathbf{S}$, będziemy mówili: *a jest punktem przestrzeni* $\mathbf{S}$. W przestrzeni $\mathbf{S}$ wyróżnimy dwie rodziny podzbiorów: $\mathcal{L}$ i $\mathcal{P}$. Elementy rodziny $\mathcal{L}$ będziemy oznaczali przez L i nazywali *prostymi*. Jeśli zaistnieje potrzeba użycia większej ilości prostych, to będziemy pisali L_1, L_2, itd. Podobnie elementy rodziny $\mathcal{P}$ oznaczymy przez π i nazwiemy *płaszczyznami*. Jeśli napiszemy π_1, π_2, to będzie to oznaczało, że będziemy rozważali dwie płaszczyzny.

W takim razie napiszemy odpowiednio:

$$a \in \mathbf{S},\ L \in \mathcal{L},\ L \subset \mathbf{S},\ \pi \in \mathcal{P},\ \pi \subset \mathbf{S}.$$

Jeśli $a \in L$, to powiemy, że *punkt a należy do prostej L*, albo *prosta L przechodzi przez punkt a*. W przypadku kiedy $a \in \pi$, powiemy: *punkt a należy do płaszczyzny* π albo *płaszczyzna π przechodzi przez punkt a*. Natomiast inkluzję $L \subset \pi$ skomentujemy, że *prosta L zawiera się w płaszczyźnie* π lub *leży na* tej płaszczyźnie, albo że *płaszczyzna π zawiera prostą L*.

Definicja 2.1 *Każdy niepusty podzbiór przestrzeni* $\mathbf{S}$ *nazwiemy* **figurą**. *Zatem elementy rodzin $\mathcal{L}$ i $\mathcal{P}$ są przykładami figur. Jeśli F jest figurą, to relację $F \subset L$ będziemy opisywali: figura F* **leży na prostej** *L. Analogicznie, jeśli $F \subset \pi$, to powiemy, że figura F* **leży na płaszczyźnie** *π.*

Dalej będziemy zakładali, że na przestrzeni $\mathbf{S}$ dane są dwie relacje: $\mathcal{B}$, jako relacja 3–argumentowa, gdzie

$$\forall_{(a,b,c)\in\mathbf{S}}\ (a,b,c) \in \mathcal{B}$$

będziemy czytali: *punkt b leży pomiędzy punktami a i b*, oraz relację $\mathcal{D}$, rozumianą jako relację 4–argumentową, gdzie

$$\forall_{(a,b,c,d)\in\mathbf{S}}\ (a,b,c,d) \in \mathcal{D}$$

będziemy czytali, że *odległość punktu a od b jest taka sama jak odległość punktu c od d.*

3 Aksjomaty geometrii Euklidesa

Dalej będziemy posługiwali się aksjomatami geometrii Euklidesa, czyli geometrii klasycznej. Ze względu na rolę jaką one pełnią w teorii (geometrii) dzielimy je na 5 grup:

- I–składa się z 9 tzw. *aksjomatów incydencji* **I1** – **I9**. Ich rola polega na ustaleniu teoriomnogościowych zależności (zdarzeń) pomiędzy punktami, prostymi i płaszczyznami.
- II–zawiera 9 kolejnych aksjomatów **O1** – **O9**, które wypowiadają się na temat własności relacji $\mathcal{B}$.
- III–zawiera 8 tzw. *aksjomatów uporządkowania* **C1** – **C8**. Aksjomaty te opisują własności relacji $\mathcal{D}$.
- IV–grupa ta zawiera tylko jeden aksjomat, zwany *aksjomatem ciągłości*, który oznaczamy jako **Co**.
- V–zawiera tzw. *aksjomat* **E**, nazywany *aksjomatem Euklidesa*–jest to słynny *5 aksjomat Euklidesa.*

3.1 Aksjomaty incydencji

Przed sformułowaniem grupy aksjomatów incydencji wygodnie będzie przyjąć następującą definicję

Definicja 3.1 *Powiemy, że punkty $a, b, c \in \mathbf{S}$ są* **współliniowe**, *jeśli*

$$\exists_{L \in \mathcal{L}} \; a, b, c \in L.$$

W przeciwnym razie powiemy, że punkty te **są niewspółliniowe**.

Dla punktów $a, b, c, d \in \mathbf{S}$ powiemy, że są one **współpłaszczyznowe**, *jeśli*

$$\exists_{\pi \in \mathcal{P}} \; a, b, c, d \in \pi.$$

W przeciwnym razie powiemy, że punkty te **są niewspółpłaszczyznowe**.

Możemy teraz przystąpić do sformułowania aksjomatów incydencji. Z wyraźnym naciskiem pragniemy zwrócić uwagę, że z punktu widzenia roli jaką aksjomaty te mają spełnić ich liczba jest minimalna. Oznacza to, że żadnego z tych aksjomatów nie da się wyprowadzić z pozostałych 27 aksjomatów. Podobna uwaga dotyczy aksjomatów z pozostałych grup.

I1.

$$\forall_{L\in\mathcal{L}}\ \exists_{a\neq b\in\mathbf{S}}\ a,b\in L.$$

I2.

$$\forall_{a,b\in\mathbf{S}}\ \exists_{L\in\mathcal{L}}\ a,b\in L.$$

I3. Jeśli $a\neq b$, to istnieje co najwyżej jedna prosta L, że $a,b\in L$.

I4. Dla każdej płaszczyzny $\pi\in\mathcal{P}$ istnieją trzy punkty niewspółliniowe należące do tej płaszczyzny.

I5. Dla dowolnych trzech punktów istnieje co najmniej jedna płaszczyzna zawierająca je.

I6. Przez dowolne trzy punkty niewspółliniowe przechodzi co najwyżej jedna płaszczyzna.

I7.

$$\forall_{L\in\mathcal{L},\pi\in\mathcal{P}}\ \Big(a\neq b\in L\ i\ a,b\in\pi\Big)\Rightarrow L\subset\pi.$$

I8.

$$\forall_{a\in\mathbf{S}}\ \forall_{\pi_1,\pi_2\in\mathcal{P}}\ a\in\pi_1\cap\pi_2\Rightarrow\exists_{b\neq a}\ b\in\pi_1\cap\pi_2.$$

I9. Istnieje co najmniej jeden zbiór $\{a,b,c,d\}\subset\mathbf{S}$ punktów niewspółpłaszczyznowych.

Uwaga 3.1

1. *Aksjomat drugi mówi tylko, że przez dwa różne punkty przechodzi co najmniej jedna prosta.*
2. *Aksjomat 3 należy rozumieć następująco*

   $$\textit{jeśli dla } a\neq b,\ \ a,b\in L,\ \ \textit{to prosta } L \textit{ jest jedyna.}$$

   Aksjomat ten jest niezależny od **I2**.
3. *Aksjomat* **I6** *mówi, że przez trzy niewspółliniowe punkty przechodzi co najwyżej jedna płaszczyzna. Nie wypowiada się na temat istnienia takiej płaszczyzny. Jest niezależny od* **I5**.
4. *Aksjomat* **I7** *mówi, że jeśli różne punkty należą jednocześnie do prostej i płaszczyzny, to ta prosta musi leżeć na tej płaszczyźnie.*
5. *Aksjomat* **I8** *mówi, że jeśli dwie płaszczyzny są nierozłączne, to mają co najmniej dwa różne punkty wspólne.*

3.2 Wnioski z aksjomatów I

Sformułujemy teraz szereg twierdzeń, które udowodnimy wykorzystując aksjomaty typu I. W ten sposób pokażemy *explicite* ich rolę w geometrii. Twierdzenia te można zebrać w cztery grupy tematyczne.

3.2.1 Niewspółliniowość i niewspółpłaszczyznowość

Twierdzenie 3.1 *Jeśli punkty a, b, c są niewspółliniowe, to są parami różne.*

Dowód. Niech a, b, c będą niewspółliniowe. Z aksjomatu **I2** istnieje prosta L, że $b, c \in L$. Gdyby dla pewnych dwóch punktów, powiedzmy a, b, $a = b$, to wtedy również $a \in L$, co przeczy temu, że punkty te były niewspółliniowe.

□

Powtarzając rozumowanie z dowodu powyższego twierdzenia z wykorzystaniem aksjomatu **I5** (zostawiamy jako ćwiczenie) można udowodnić, że

Twierdzenie 3.2 *Jeśli punkty a, b, c, d są niewspółpłaszczynowe, to są parami różne.*

Twierdzenie 3.3 *Jeżeli punkty a, b, c, d są niewspółpłaszczyznowe, to każde trzy spośród nich są niewspółliniowe.*

Dowód. Niech punkty a, b, c, d spełniają założenie twierdzenia. Gdyby np. punkty a, b, c były współliniowe, to zgodnie z definicją

$$a, b, c \in L$$

dla pewnej prostej L. Z drugiej strony, z aksjomatu **I5** wynika, że

$$a, b, d \in \pi,$$

dla pewnej płaszczyzny π.

W taki razie $a, b \in L \cap \pi$. Z założenia i twierdzenia 3.2 wynika, że $a \neq b$. Aksjomat **I7** mówi, że wtedy musi zachodzić inkluzja $L \subset \pi$. Ale $c \in L$, więc również $c \in \pi$. W takim razie punkty a, b, c, d należą do płaszczyny π, co jest niemożliwe.

□

Wprost z aksjomatu **I3** (dlaczego?) wynika kolejne twierdzenie

Twierdzenie 3.4 *Dla różnych punktów $a, b \in L$ i punktu $c \notin L$, punkty a, b, c są niewspółliniowe.*

Podobnie wprost z aksjomatu **I6** mamy (dlaczego?)

Twierdzenie 3.5 *Niech punkty a, b, c będą niewspółliniowe oraz należą do płaszczyzny π. Jeśli dla pewnego punktu d, $d \notin \pi$, to punkty a, b, c, d są niewspółpłaszczyznowe.*

3.2.2 Proste i płaszczyzny

Zajmiemy się teraz problemem wyznaczania prostej i płaszczyzny jako podzbiorów przestrzeni **S**.

Twierdzenie 3.6 *Przez dwa różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta. Powiemy też, że prosta wyznaczona jest jednoznacznie przez parę różnych punktów.*

<u>Dowód.</u> Z aksjomatu **I2** mamy: jeśli $a, b \in \mathbf{S}$, to istnieje co najmniej jedna prosta L przechodząca przez te punkty. Ponieważ z założenia są one różne, aksjomat **I3** mówi, że co najwyżej jedna prosta ma tę własność. Dlatego taka prosta jest jedyna. Dalej taką prostą oznaczymy przez $L(a, b)$.

$\square$

Wersja powyższego twierdzenia dla płaszczyzny wygląda następująco

Twierdzenie 3.7 *Przez trzy niewspółliniowe punkty przechodzi dokładnie jedna płaszczyzna.*

<u>Dowód.</u> Z aksjomatu **I5** przez każde trzy punkty a, b, c przechodzi co najmniej jedna płaszczyzna. Aksjomat **I6** precyzuje, że jeśli są one niewspółliniowe, to musi ona być jedyna. Dalej taką płaszczyznę oznaczymy przez $\pi(a, b, c)$.

$\square$

Twierdzenie 3.8 *Przez prostą L i punkt $c \notin L$ przechodzi dokładnie jedna płaszczyzna.*

Dowód. Z aksjomatu **I1** istnieją dwa różne punkty $a, b \in L$. W twierdzeniu 3.4 pokazaliśmy, że wtedy trzy punkty a, b, c, gdzie $c \notin L$ muszą być niewspółliniowe. W takim razie z twierdzenia 3.7 istnieje dokładnie jedna płaszyzna, że $\pi = \pi(a, b, c)$. Ale wtedy dla punktów a, b mamy $a, b \in L \cap \pi$, co z aksjomatu **I7** oznacza, że $L \subset \pi$. Dlatego płaszczyzna π jest jedyną płaszczyzną przechodzącą przez prostą L i punkt c.

□

Twierdzenie 3.9 *Przez dwie różne przecinające się proste przechodzi dokładnie jedna płaszczyzna.*

Dowód. Niech dane będą dwie różne proste L_1, L_2. Z założenia $a \in L_1 \cap L_2$ dla pewnego punktu a. Z aksjomatu **I1** na prostej L_1 znajdzie punkt $c \neq a$. Ponieważ proste te są różne, z twierdzenia 3.6 wynika, że $c \notin L_2$. Przed chwilą pokazaliśmy (twierdzenie 3.8), że w takiej sytuacji istnieje jedyna płaszczyzna π, że

$$c \in \pi, \ L_2 \subset \pi.$$

Mamy więc dwa różne punkty, które należą jednocześnie do płaszczyzny π i prostej L_1. Z aksjomatu **I7** oznacza to, że $L_1 \subset \pi$. Ponieważ L_2 też leży na tej płaszczyźnie, więc twierdzenie zostało udowodnione.

□

3.2.3 Twierdzenie o istnieniu

W kolejnym twierdzeniu zaprezentujemy rolę aksjomatu **I9**.

Twierdzenie 3.10

- *Niech dana będzie prosta L. Wtedy dla dowolnego punktu $a \in L$ istnieje co najmniej jeden punkt $b \in L$, różny od a.*
- *Dla dowolnej płaszczyzny π i dowolnie wybranych różnych punktów $a, b \in \pi$ istnieje taki punkt $c \in \pi$, że punkty a, b, c są niewspółliniowe.*
- *Dla dowolnych trzech niewspółliniowych punktów a, b, c istniej taki czwarty d, że punkty a, b, c, d są niewspółpłaszczyznowe.*

Dowód.

- Z aksjomatu **I1** na prostej L leżą co najmniej dwa różne punkty p, q. Dlatego jeden z nich musi być różny od punktu a. Jest on szukanym punktem b.

- Aksjomat **I4** mówi, że na każdej płaszczyźnie π leżą trzy niewspółliniowe punkty p, q, r. Zatem co najmniej jeden z nich, powiedzmy r nie należy do prostej $L = L(a, b)$. Z twierdzenia 3.4 wynika, że wtedy punkty a, b, r są niewspółliniowe. W takim razie (twierdzenie 3.7) wyznaczają one dokładnie jedną płaszczyznę $\pi = \pi(a, b, r)$. Dla zakończenia dowodu wystarczy przyjąć, że $c = r$.

- Niech a, b, c będą niewspółliniowe i weźmy płaszczyznę π zawierającą te punkty (twierdzenie 3.7). Aksjomat **I9** mówi że istnieje co najmniej jedna czwórka punktów p, q, r, s, które są niewspółpłaszczyznowe. W takim razie co najmniej jeden z nich, powiedzmy s nie może należeć do tej płaszczyzny. Z twierdzenie 3.5 wynika, że w takiej sytuacji punkty a, b, c, s są niewspółpłaszczyznowe. W takim razie wystarczy wziąć $d = s$.

□

3.2.4 Przecięcie się prostych i płaszczyzn

Zbadamy teraz wzajemne położenie prostych i płaszczyzn oraz konsekwencje tego położenia.

Twierdzenie 3.11 *Dla dowolnych prostych L_1, L_2 albo:*

- $$L_1 \cap L_2 = \emptyset, \ \textit{czyli są rozłączne, albo}$$

- $$L_1 = L_2, \ \textit{czyli są jednakowe, albo}$$

- $$L_1 \cap L_2 = \{a\}, \ \textit{czyli przecinają się dokładnie w jednym punkcie.}$$

Dowód. Weźmy dwie proste L_1, L_2 i załóżmy, że $L_1 \neq L_2$ i przecinają się. Wtedy istnieje co najmnie jeden punkt a, że $a \in L_1 \cap L_2$. Należy pokazać, że punkt o takiej własności jest jedyny. Przypuśćmy, że tak nie jest. Wtedy dla pewnego punktu b, $b \neq a$ mielibyśmy $b \in L_1 \cap L_2$. Aksjomat **I3** mówi, że istnieje wtedy co najwyżej jedna prosta $L(a, b)$ zawierająca oba punkty. W takim razie $L_1 = L_2$, co jest niemożliwe.

□

Twierdzenie 3.12 *Niech dana będzie prosta L i płaszczyzna π. Wtedy albo:*

- $$L \cap \pi = \emptyset, \text{ czyli prosta nie przebija płaszczyzny, albo}$$
- *jeśli*
$$L \cap \pi \neq \emptyset, \text{ czyli prosta przebija płaszczyznę,}$$
to albo
  - $$L \subset \pi, \text{ czyli prosta leży na płaszczyźnie, albo}$$
  - $$L \not\subset \pi \text{ i } L \cap \pi = \{a\}, \text{ dla pewnego punktu } a.$$

Dowód. Przypuśćmy, że prosta L przebija płaszczyznę, czyli $L \cap \pi \neq \emptyset$ oraz nie jest zawarta w tej płaszczyźnie. Weźmy punkt a, taki że $a \in L \cap \pi$. Zauważmy, że aksjomat **I7** wyklucza istnienie innego punktu $b \in L \cap \pi$, bowiem wtedy $L \subset \pi$, a tak nie jest.

□

Omawianie akcjomatów incydencji zakończymy następującym twierdzeniem

Twierdzenie 3.13 *Niech dane będą dwie różne płaszczyzny π_1, π_2. Wtedy albo są one rozłączne, czyli $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$, albo ich część wspólna jest prostą, czyli istnieje $L \in \mathcal{L}$, $L = \pi_1 \cap \pi_2$.*

Dowód. Załóżmy, że dla dwóch różnych płaszczyzn π_1, π_2, $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \emptyset$. Istniej więc punkt a, taki że $a \in \pi_1 \cap \pi_2$. Ale wtedy (aksjomat **I8**) znajdzie się punkt $b \neq a$, że $b \in \pi_1 \cap \pi_2$. Weźmy prostą $L = L(a, b)$ wyznaczoną jednoznacznie przez te punkty (twierdzenie 3.6). Z aksjomatu **I7** musi wtedy być

$$L(a, b) \subset \pi_1 \cap \pi_2.$$

Należy pokazać, że $\pi_1 \cap \pi_2 \subset L(a, b)$. Przypuśćmy, że dla pewnego punktu c, $c \in \pi_1 \cap \pi_2$ i $c \notin L(a, b)$. Wtedy z twierdzenia 3.4 punkty a, b, c są niewspółliniowe. Z twierdzenia 3.7 istnieje dokładnie jedna płaszczyzna π zawierająca je. Oznacza to, że $\pi_2 = \pi = \pi_1$, co jest niemożliwe.

□