Podstawy kształcenia matematycznego
Wykład 6, 7, 8
Wprowadzenie do geometrii część I, II, III
30 maja 2010

1 Wprowadzenie

Geometria jest tą dziedziną matematyki na przykładzie, której najlepiej widać *aksjomatyczną* konstrukcję teorii matematycznej. Najciekawsze jest to, że już w chwili jej powstania miała postać zaksjomatyzowaną. Tymczasem druga sfera zainteresowań matematycznych człowieka–teoria liczb doczekała się swojej aksjomatyzacji dopiero na przełomie XIX i XX wieku, z nastaniem współczesnej *teorii mnogości* Cantora. Co to może oznaczać? Tylko jedno–geometria jest nauką bardzo abstrakcyjną i tak musi być odbierana, co wcale nie stoi w sprzeczności ze stwierdzeniem, że mimo wszystko jest nauką bardzo intuicyjną. Przecież większość z nas nie ma problemu ze zrozumieniem takich pojęć jak: *punkt, prosta, płaszczyzna.* Ale kto widział te obiekty? Jeśli widzieliśmy punkty, to tylko w fizycznym tego słowa znaczeniu, na pewno nie w znaczeniu geometrycznym. Prostej na pewno nie widzieliśmy i nigdy nie zobaczymy–postrzegamy bowiem tylko fragment czegoś co nazywamy prostą. Podobnie jest z płaszczyzną. Nie mamy problemów też z akceptacją stwierdzenia, że *dwie proste równoległe i różne nie przecinają się.* Jak to możliwe, skoro nigdy nie zaobserwujemy takiego zjawiska? Rozsądna odpowiedź jest jedna: u podstaw naszej wyobraźni i rozumowania leży pogląd, że skoro nie ma podstaw twierdzić, że takie proste nie przetną się (bo widzimy wycinek tego zjawiska), to przyjmujemy to za prawdę. Tymczasem współczesna fizyka wyjaśnia, że jest inaczej! *Ogólna teoria wzglzględności* Einsteina przewiduje, że takie proste muszą przecinać się. Zatem z tą intuicją niestety nie jest do końca tak dobrze. W takim razie o co tutaj chodzi?

Odpowiedź jest dość złożona. Z jednej strony można bowiem mówić o jednej geometrii, tzw. *geometrii absolutnej*, z drugiej strony wyróżnia się *geometrię euklidesową*, sformułowaną ok. 300 r.p.n.e przez Euklidesa w słynnym dziele *Elementy* i obowiązującą, jako jedyna do końca XIX wieku oraz *geometrię nieeuklidesową*, powstałą w połowie XIX w., sformułowaną niezależnie przez matematyka rosyjskiego Łobaczewskiego i węgierskiego Bolyai'a, a następnie uogólnioną przez Riemanna. Chodzi o to, że obie geometrie opierają się na wspólnym zbiorze aksjomatów, z których można wyprowadzić każdą z tych geometrii, ale też różnią się i to bardzo. Obie teorie są prawdziwe, jako niesprzeczne, ale prowadzą do różnych, bo wykluczających się wniosków. Jest to możliwe, bowiem pomimo, że posiadają wspólne zbiory aksjomatów, to jednak wyprowadzone są ze zbiorów różnych.

Nasz wykład oprzemy na klasycznym zbiorze aksjomatów, czyli pochodzących od Euklidesa. Zaczniemy od sformułowania kilku podstawowych pojęć.

2 Pojęcia pierwotne geometrii

Dany będzie niepusty zbiór $\mathbf{S}$. Elementy tego zbioru będziemy oznaczali a, b, c itd. i nazywali *punktami*. Zbiór $\mathbf{S}$ nazwiemy *przestrzenią*. Dlatego o tym, że $a \in \mathbf{S}$, będziemy mówili: *a jest punktem przestrzeni* $\mathbf{S}$. W przestrzeni $\mathbf{S}$ wyróżnimy dwie rodziny podzbiorów: $\mathcal{L}$ i $\mathcal{P}$. Elementy rodziny $\mathcal{L}$ będziemy oznaczali przez L i nazywali *prostymi*. Jeśli zaistnieje potrzeba użycia większej ilości prostych, to będziemy pisali L_1, L_2, itd. Podobnie elementy rodziny $\mathcal{P}$ oznaczymy przez π i nazwiemy *płaszczyznami*. Jeśli napiszemy π_1, π_2, to będzie to oznaczało, że będziemy rozważali dwie płaszczyzny.

W takim razie napiszemy odpowiednio:

$$a \in \mathbf{S},\ L \in \mathcal{L},\ L \subset \mathbf{S},\ \pi \in \mathcal{P},\ \pi \subset \mathbf{S}.$$

Jeśli $a \in L$, to powiemy, że *punkt a należy do prostej L*, albo *prosta L przechodzi przez punkt a*. W przypadku kiedy $a \in \pi$, powiemy: *punkt a należy do płaszczyzny* π albo *płaszczyzna π przechodzi przez punkt a*. Natomiast inkluzję $L \subset \pi$ skomentujemy, że *prosta L zawiera się w płaszczyźnie* π lub *leży na* tej płaszczyźnie, albo że *płaszczyzna π zawiera prostą L*.

Definicja 2.1 *Każdy niepusty podzbiór przestrzeni* $\mathbf{S}$ *nazwiemy* **figurą**. *Zatem elementy rodzin $\mathcal{L}$ i $\mathcal{P}$ są przykładami figur. Jeśli F jest figurą, to relację $F \subset L$ będziemy opisywali: figura F* **leży na prostej** L. *Analogicznie, jeśli $F \subset \pi$, to powiemy, że figura F* **leży na płaszczyźnie** π.

Dalej będziemy zakładali, że na przestrzeni $\mathbf{S}$ dane są dwie relacje: $\mathcal{B}$, jako relacja 3–argumentowa, gdzie

$$\forall_{(a,b,c)\in\mathbf{S}}\ (a, b, c) \in \mathcal{B}$$

będziemy czytali: *punkt b leży pomiędzy punktami a i b*, oraz relację $\mathcal{D}$, rozumianą jako relację 4–argumentową, gdzie

$$\forall_{(a,b,c,d)\in\mathbf{S}}\ (a, b, c, d) \in \mathcal{D}$$

będziemy czytali, że *odległość punktu a od b jest taka sama jak odległość punktu c od d.*

3 Aksjomaty geometrii Euklidesa

Dalej będziemy posługiwali się aksjomatami geometrii Euklidesa, czyli geometrii klasycznej. Ze względu na rolę jaką one pełnią w teorii (geometrii) dzielimy je na 5 grup:

- I–składa się z 9 tzw. *aksjomatów incydencji* **I1 – I9**. Ich rola polega na ustaleniu teoriomnogościowych zależności (zdarzeń) pomiędzy punktami, prostymi i płaszczyznami.
- II–zawiera 9 kolejnych aksjomatów **O1 – O9**, które wypowiadają się na temat własności relacji $\mathcal{B}$.
- III–zawiera 8 tzw. *aksjomatów uporządkowania* **C1 – C8**. Aksjomaty te opisują własności relacji $\mathcal{D}$.
- IV–grupa ta zawiera tylko jeden aksjomat, zwany *aksjomatem ciągłości*, który oznaczamy jako **Co**.
- V–zawiera tzw. *aksjomat* **E**, nazywany *aksjomatem Euklidesa*–jest to słynny *5 aksjomat Euklidesa.*

3.1 Aksjomaty incydencji

Przed sformułowaniem grupy aksjomatów incydencji wygodnie będzie przyjąć następującą definicję

Definicja 3.1 *Powiemy, że punkty* $a, b, c \in \mathbf{S}$ *są* **współliniowe**, *jeśli*

$$\exists_{L\in\mathcal{L}}\ a, b, c \in L.$$

W przeciwnym razie powiemy, że punkty te **są niewspółliniowe**.

Dla punktów $a, b, c, d \in \mathbf{S}$ *powiemy, że są one* **współpłaszczyznowe**, *jeśli*

$$\exists_{\pi\in\mathcal{P}}\ a, b, c, d \in \pi.$$

W przeciwnym razie powiemy, że punkty te **są niewspółpłaszczyznowe**.

Możemy teraz przystąpić do sformułowania aksjomatów incydencji. Z wyraźnym naciskiem pragniemy zwrócić uwagę, że z punktu widzenia roli jaką aksjomaty te mają spełnić ich liczba jest minimalna. Oznacza to, że żadnego z tych aksjomatów nie da się wyprowadzić z pozostałych 27 aksjomatów. Podobna uwaga dotyczy aksjomatów z pozostałych grup.

I1.

$$\forall_{L\in\mathcal{L}}\ \exists_{a\neq b\in\mathbf{S}}\ a,b\in L.$$

I2.

$$\forall_{a,b\in\mathbf{S}}\ \exists_{L\in\mathcal{L}}\ a,b\in L.$$

I3. Jeśli $a\neq b$, to istnieje co najwyżej jedna prosta L, że $a,b\in L$.

I4. Dla każdej płaszczyzny $\pi\in\mathcal{P}$ istnieją trzy punkty niewspółliniowe należące do tej płaszczyzny.

I5. Dla dowolnych trzech punktów istnieje co najmniej jedna płaszczyzna zawierająca je.

I6. Przez dowolne trzy punkty niewspółliniowe przechodzi co najwyżej jedna płaszczyzna.

I7.

$$\forall_{L\in\mathcal{L},\pi\in\mathcal{P}}\ \Big(a\neq b\in L\ i\ a,b\in\pi\Big)\Rightarrow L\subset\pi.$$

I8.

$$\forall_{a\in\mathbf{S}}\ \forall_{\pi_1,\pi_2\in\mathcal{P}}\ a\in\pi_1\cap\pi_2\Rightarrow\exists_{b\neq a}\ b\in\pi_1\cap\pi_2.$$

I9. Istnieje co najmniej jeden zbiór $\{a,b,c,d\}\subset\mathbf{S}$ punktów niewspółpłaszczyznowych.

Uwaga 3.1

1. *Aksjomat drugi mówi tylko, że przez dwa różne punkty przechodzi co najmniej jedna prosta.*

2. *Aksjomat 3 należy rozumieć następująco*

   $$\textit{jeśli dla } a\neq b,\ \ a,b\in L,\ \ \textit{to prosta } L \textit{ jest jedyna.}$$

   Aksjomat ten jest niezależny od **I2**.

3. *Aksjomat* **I6** *mówi, że przez trzy niewspółliniowe punkty przechodzi co najwyżej jedna płaszczyzna. Nie wypowiada się na temat istnienia takiej płaszczyzny. Jest niezależny od* **I5**.

4. *Aksjomat* **I7** *mówi, że jeśli różne punkty należą jednocześnie do prostej i płaszczyzny, to ta prosta musi leżeć na tej płaszczyźnie.*

5. *Aksjomat* **I8** *mówi, że jeśli dwie płaszczyzny są nierozłączne, to mają co najmniej dwa różne punkty wspólne.*

3.2 Wnioski z aksjomatów I

Sformułujemy teraz szereg twierdzeń, które udowodnimy wykorzystując aksjomaty typu I. W ten sposób pokażemy *explicite* ich rolę w geometrii. Twierdzenia te można zebrać w cztery grupy tematyczne.

3.2.1 Niewspółliniowość i niewspółpłaszczyznowość

Twierdzenie 3.1 *Jeśli punkty a, b, c są niewspółliniowe, to są parami różne.*

Dowód. Niech a, b, c będą niewspółliniowe. Z aksjomatu **I2** istnieje prosta L, że $b, c \in L$. Gdyby dla pewnych dwóch punktów, powiedzmy a, b, $a = b$, to wtedy również $a \in L$, co przeczy temu, że punkty te były niewspółliniowe.

□

Powtarzając rozumowanie z dowodu powyższego twierdzenia z wykorzystaniem aksjomatu **I5** (zostawiamy jako ćwiczenie) można udowodnić, że

Twierdzenie 3.2 *Jeśli punkty a, b, c, d są niewspółpłaszczynowe, to są parami różne.*

Twierdzenie 3.3 *Jeżeli punkty a, b, c, d są niewspółpłaszczyznowe, to każde trzy spośród nich są niewspółliniowe.*

Dowód. Niech punkty a, b, c, d spełniają założenie twierdzenia. Gdyby np. punkty a, b, c były współliniowe, to zgodnie z definicją

$$a, b, c \in L$$

dla pewnej prostej L. Z drugiej strony, z aksjomatu **I5** wynika, że

$$a, b, d \in \pi,$$

dla pewnej płaszczyzny π.

W taki razie $a, b \in L \cap \pi$. Z założenia i twierdzenia 3.2 wynika, że $a \neq b$. Aksjomat **I7** mówi, że wtedy musi zachodzić inkluzja $L \subset \pi$. Ale $c \in L$, więc również $c \in \pi$. W takim razie punkty a, b, c, d należą do płaszczyny π, co jest niemożliwe.

□

Wprost z aksjomatu **I3** (dlaczego?) wynika kolejne twierdzenie

Twierdzenie 3.4 *Dla różnych punktów $a, b \in L$ i punktu $c \notin L$, punkty a, b, c są niewspółliniowe.*

Podobnie wprost z aksjomatu **I6** mamy (dlaczego?)

Twierdzenie 3.5 *Niech punkty a, b, c będą niewspółliniowe oraz należą do płaszczyzny π. Jeśli dla pewnego punktu d, $d \notin \pi$, to punkty a, b, c, d są niewspółpłaszczyznowe.*

3.2.2 Proste i płaszczyzny

Zajmiemy się teraz problemem wyznaczania prostej i płaszczyzny jako podzbiorów przestrzeni **S**.

Twierdzenie 3.6 *Przez dwa różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta. Powiemy też, że prosta wyznaczona jest jednoznacznie przez parę różnych punktów.*

Dowód. Z aksjomatu **I2** mamy: jeśli $a, b \in \mathbf{S}$, to istnieje co najmniej jedna prosta L przechodząca przez te punkty. Ponieważ z założenia są one różne, aksjomat **I3** mówi, że co najwyżej jedna prosta ma tę własność. Dlatego taka prosta jest jedyna. Dalej taką prostą oznaczymy przez $L(a, b)$.

□

Wersja powyższego twierdzenia dla płaszczyzny wygląda następująco

Twierdzenie 3.7 *Przez trzy niewspółliniowe punkty przechodzi dokładnie jedna płaszczyzna.*

Dowód. Z aksjomatu **I5** przez każde trzy punkty a, b, c przechodzi co najmniej jedna płaszczyzna. Aksjomat **I6** precyzuje, że jeśli są one niewspółliniowe, to musi ona być jedyna. Dalej taką płaszczyznę oznaczymy przez $\pi(a, b, c)$.

□

Twierdzenie 3.8 *Przez prostą L i punkt $c \notin L$ przechodzi dokładnie jedna płaszczyzna.*

Dowód. Z aksjomatu **I1** istnieją dwa różne punkty $a, b \in L$. W twierdzeniu 3.4 pokazaliśmy, że wtedy trzy punkty a, b, c, gdzie $c \notin L$ muszą być niewspółliniowe. W takim razie z twierdzenia 3.7 istnieje dokładnie jedna płaszczyzna, że $\pi = \pi(a, b, c)$. Ale wtedy dla punktów a, b mamy $a, b \in L \cap \pi$, co z aksjomatu **I7** oznacza, że $L \subset \pi$. Dlatego płaszczyzna π jest jedyną płaszczyzną przechodzącą przez prostą L i punkt c.

□

Twierdzenie 3.9 *Przez dwie różne przecinające się proste przechodzi dokładnie jedna płaszczyzna.*

Dowód. Niech dane będą dwie różne proste L_1, L_2. Z założenia $a \in L_1 \cap L_2$ dla pewnego punktu a. Z aksjomatu **I1** na prostej L_1 znajdzie punkt $c \neq a$. Ponieważ proste te są różne, z twierdzenia 3.6 wynika, że $c \notin L_2$. Przed chwilą pokazaliśmy (twierdzenie 3.8), że w takiej sytuacji istnieje jedyna płaszczyzna π, że

$$c \in \pi, \;\; L_2 \subset \pi.$$

Mamy więc dwa różne punkty, które należą jednocześnie do płaszczyzny π i prostej L_1. Z aksjomatu **I7** oznacza to, że $L_1 \subset \pi$. Ponieważ L_2 też leży na tej płaszczyźnie, więc twierdzenie zostało udowodnione.

□

3.2.3 Twierdzenie o istnieniu

W kolejnym twierdzeniu zaprezentujemy rolę aksjomatu **I9**.

Twierdzenie 3.10

- *Niech dana będzie prosta L. Wtedy dla dowolnego punktu $a \in L$ istnieje co najmniej jeden punkt $b \in L$, różny od a.*
- *Dla dowolnej płaszczyzny π i dowolnie wybranych różnych punktów $a, b \in \pi$ istnieje taki punkt $c \in \pi$, że punkty a, b, c są niewspółliniowe.*
- *Dla dowolnych trzech niewspółliniowych punktów a, b, c istniej taki czwarty d, że punkty a, b, c, d są niewspółpłaszczyznowe.*

Dowód.

- Z aksjomatu **I1** na prostej L leżą co najmniej dwa różne punkty p, q. Dlatego jeden z nich musi być różny od punktu a. Jest on szukanym punktem b.

- Aksjomat **I4** mówi, że na każdej płaszczyźnie π leżą trzy niewspółliniowe punkty p, q, r. Zatem co najmniej jeden z nich, powiedzmy r nie należy do prostej $L = L(a, b)$. Z twierdzenia 3.4 wynika, że wtedy punkty a, b, r są niewspółliniowe. W takim razie (twierdzenie 3.7) wyznaczają one dokładnie jedną płaszczyznę $\pi = \pi(a, b, r)$. Dla zakończenia dowodu wystarczy przyjąć, że $c = r$.

- Niech a, b, c będą niewspółliniowe i weźmy płaszczyznę π zawierającą te punkty (twierdzenie 3.7). Aksjomat **I9** mówi że istnieje co najmniej jedna czwórka punktów p, q, r, s, które są niewspółpłaszczyznowe. W takim razie co najmniej jeden z nich, powiedzmy s nie może należeć do tej płaszczyzny. Z twierdzenie 3.5 wynika, że w takiej sytuacji punkty a, b, c, s są niewspółpłaszczyznowe. W takim razie wystarczy wziąć $d = s$.

□

3.2.4 Przecięcie się prostych i płaszczyzn

Zbadamy teraz wzajemne położenie prostych i płaszczyzn oraz konsekwencje tego położenia.

Twierdzenie 3.11 *Dla dowolnych prostych L_1, L_2 albo:*

- $$L_1 \cap L_2 = \emptyset, \ \textit{czyli są rozłączne, albo}$$

- $$L_1 = L_2, \ \textit{czyli są jednakowe, albo}$$

- $$L_1 \cap L_2 = \{a\}, \ \textit{czyli przecinają się dokładnie w jednym punkcie.}$$

Dowód. Weźmy dwie proste L_1, L_2 i załóżmy, że $L_1 \neq L_2$ i przecinają się. Wtedy istnieje co najmnie jeden punkt a, że $a \in L_1 \cap L_2$. Należy pokazać, że punkt o takiej własności jest jedyny. Przypuśćmy, że tak nie jest. Wtedy dla pewnego punktu b, $b \neq a$ mielibyśmy $b \in L_1 \cap L_2$. Aksjomat **I3** mówi, że istnieje wtedy co najwyżej jedna prosta $L(a, b)$ zawierająca oba punkty. W takim razie $L_1 = L_2$, co jest niemożliwe.

□

Twierdzenie 3.12 *Niech dana będzie prosta L i płaszczyzna π. Wtedy albo:*

- $$L \cap \pi = \emptyset, \text{ czyli prosta nie przebija płaszczyzny, albo}$$
- *jeśli*
  $$L \cap \pi \neq \emptyset, \text{ czyli prosta przebija płaszczyznę,}$$
  to albo
  - $$L \subset \pi, \text{ czyli prosta leży na płaszczyźnie, albo}$$
  - $$L \not\subset \pi \text{ i } L \cap \pi = \{a\}, \text{ dla pewnego punktu } a.$$

Dowód. Przypuśćmy, że prosta L przebija płaszczyznę, czyli $L \cap \pi \neq \emptyset$ oraz nie jest zawarta w tej płaszczyźnie. Weźmy punkt a, taki że $a \in L \cap \pi$. Zauważmy, że aksjomat **I7** wyklucza istnienie innego punktu $b \in L \cap \pi$, bowiem wtedy $L \subset \pi$, a tak nie jest.

□

Omawianie akcjomatów incydencji zakończymy następującym twierdzeniem

Twierdzenie 3.13 *Niech dane będą dwie różne płaszczyzny π_1, π_2. Wtedy albo są one rozłączne, czyli $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$, albo ich część wspólna jest prostą, czyli istnieje $L \in \mathcal{L}$, $L = \pi_1 \cap \pi_2$.*

Dowód. Załóżmy, że dla dwóch różnych płaszczyzn π_1, π_2, $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \emptyset$. Istniej więc punkt a, taki że $a \in \pi_1 \cap \pi_2$. Ale wtedy (aksjomat **I8**) znajdzie się punkt $b \neq a$, że $b \in \pi_1 \cap \pi_2$. Weźmy prostą $L = L(a, b)$ wyznaczoną jednoznacznie przez te punkty (twierdzenie 3.6). Z aksjomatu **I7** musi wtedy być

$$L(a, b) \subset \pi_1 \cap \pi_2.$$

Należy pokazać, że $\pi_1 \cap \pi_2 \subset L(a, b)$. Przypuśćmy, że dla pewnego punktu c, $c \in \pi_1 \cap \pi_2$ i $c \notin L(a, b)$. Wtedy z twierdzenia 3.4 punkty a, b, c są niewspółliniowe. Z twierdzenia 3.7 istnieje dokładnie jedna płaszczyzna π zawierająca je. Oznacza to, że $\pi_2 = \pi = \pi_1$, co jest niemożliwe.

□

3.3 Aksjomaty uporządkowania

Przejdziemy teraz do omówienia aksjomatów, które postulują istnienie pierwszej z dwóch relacji–relacji trzyargumentowej $\mathcal{B}$ (od *between*). Ze względu na znaczenie i własności tej relacji aksjomaty te nazywamy *aksjomatami uporządkowania*. Jak wspominaliśmy, aksjomatów tych jest 9. Ograniczymy się do podania tylko pierwszych ośmiu. Ponieważ dotyczą one relacji punktów współliniowych, nazywamy je także *aksjomatami uporządkowania liniowego*.

Będziemy zakładali, że $\mathcal{B}$ jest relacją na $\mathbf{S} \times \mathbf{S} \times \mathbf{S}$, gdzie zapis

$$(a, b, c) \in \mathcal{B}$$

będziemy czytali *punkt b leży pomiędzy punktami a i c.*

Relacja ta ma następujące własności postulowane w aksjomatach uporządkowania liniowego.

O1

$$(a, b, c) \in \mathcal{B} \Rightarrow \text{punkty } a, b, c \text{ są współliniowe i różne.}$$

O2

$$(a, b, c) \in \mathcal{B} \Leftrightarrow (c, b, a) \in \mathcal{B}.$$

O3

$$(a, b, c) \in \mathcal{B} \Rightarrow \neg\Big((b, a, c) \in \mathcal{B}\Big).$$

O4

Jeśli punkty a, b, c są współliniowe i różne, to

$$(a, b, c) \in \mathcal{B} \vee (b, c, a) \in \mathcal{B} \vee (c, a, b) \in \mathcal{B}.$$

O5

Jeśli $a \neq b$, to istnieje punkt c, że $(a, b, c) \in \mathcal{B}$.

O6

Jeśli $a \neq b$, to istnieje punkt c, że $(a, c, b) \in \mathcal{B}$.

O7

Jeśli $(a, b, c) \in \mathcal{B}$ i $(b, c, d) \in \mathcal{B}$, to $(a, b, d) \in \mathcal{B}$.

O8

Jeśli $(a, b, d) \in \mathcal{B}$ i $(b, c, d) \in \mathcal{B}$, to $(a, b, c) \in \mathcal{B}$.

Uwaga 3.2

1. *Aksjomat* **O1** *mówi, że jeśli trzy punkty są niewspółliniowe lub nie są parami różne, to nie mogą być w relacji* $\mathcal{B}$. *Zatem, jeśli* a, b, c *wyznaczają jednoznacznie płaszczyznę lub np.* $a = b$, *to* $\neg\Big((a, b, c) \in \mathcal{B}\Big)$.

2. *Aksjomaty* **O2** *i* **O3** *wyjaśniają oznaczenie i treść relacji* $\mathcal{B}$: *to, że* $(a, b, c) \in \mathcal{B}$ *oznacza, że trzy różne punkty leżące na prostej (aksjomat* **O1***) zawierają między sobą punkt* b. *Możemy też powiedzieć, że punkt* b *nie może być wtedy punktem pierwszym ani trzecim, jeśli* $(a, b, c) \in \mathcal{B}$.

3. *Aksjomat* **O4** *mówi, że każda prosta* **L** *jako podzbiór przestrzeni* **S** *jest uporządkowana w tym sensie, że dla dowolnych trzech różnych punktów należących do* **L**, *któryś z nich musi leżeć pomiędzy pozostałymi. Takie uporządkowanie nazywamy liniowym.*

4. *Aksjomaty* **O5** *przy udziale* **O1** *i* **O2** *mówi, że w sensie porządku, o którym pisaliśmy wyżej, każdą prostą można dowolnie przedłużać w obu kierunkach. Wyjaśnimy to dokładniej. Weźmy dowolną prostą* **L**. *Jak dobrze wiadomo, istnieją wtedy dwa różne punkty* $a, b \in$ **L**. *Aksjomat* **O5** *mówi, że wtedy* $(a, b, c) \in \mathcal{B}$ *dla pewnego punktu* c. *Z aksjomatu* **O1** *wynika, że* $c \in$ **L**, *co daje efekt przedłużenia prostej na prawo (efekt przedłużenia w lewo wynika z aksjomatu* **O2***).*

5. *Aksjomat* **O6** *ma swoje konsekwencje mnogościowe, o czym powiemy później– tłumaczy, że prosta jako podzbiór przestrzeni nie może być zbiorem skończonym.*

6. *Aksjomaty* **O7** *i* **O8** *przypominają własność przechodniości relacji dwuargumentowej.*

Wniosek 3.1 *Dla dowolnych trzech różnych punktów* a, b, c

1.
$$(a, b, c) \in \mathcal{B} \ \wedge \ (b, c, d) \in \mathcal{B} \Rightarrow (a, c, d) \in \mathcal{B}.$$

2.
$$(a, b, d) \in \mathcal{B} \ \wedge \ (b, c, d) \in \mathcal{B} \Rightarrow (a, c, d) \in \mathcal{B}.$$

Dowód. Niech $(a, b, c) \in \mathcal{B} \ \wedge \ (b, c, d) \in \mathcal{B}$. Z **O2** wtedy odpowiednio

$$(c, b, a) \in \mathcal{B} \ \wedge \ (d, c, b) \in \mathcal{B},$$

co z **O7** oznacza, że $(d, c, a) \in \mathcal{B}$. Ale wtedy z **O2**, $(a, c, d) \in \mathcal{B}$, co dowodzi (1). Dowód (2) przebiega podobnie i zostawiamy go Czytelnikowi.

□

3.4 Pojęcie odcinka

Zbiór $\{a, b\}$, gdzie $a \neq b$ nazywamy *odcinkiem*. Wtedy punkty a, b są jego *końcami*. Dalej odcinek taki będziemy oznaczali przez ab.

Niech $a \neq b$. Z aksjomatu **O6** wiemy, że zbiór

$$\{c \in \mathbf{S}\colon\ (a, c, b) \in \mathcal{B}\}$$

jest niepusty. Dalej będziemy pisali

$$(ab) = \{c \in \mathbf{S}\colon\ (a, c, b) \in \mathcal{B}\},$$

a zbiór (ab) będziemy nazywali *odcinkiem otwartym*.

Kolejne twierdzenie będące konsekwencją definicji odcinka i odcinka otwartego wyjaśnia podstawowe własności odcinka otwartego

Twierdzenie 3.14 *Dla każdych dwóch różnych punktów a, b mamy:*

1.
$$ab = ba;$$

2.
$$(ab) = (ba);$$

3.
$$a, b \in \mathbf{L} \Rightarrow (ab) \subset \mathbf{L}.$$

Można też mówić o *odcinku domkniętym* $< ab >$, gdzie $< ab >= (ab) \cup \{a, b\}$. Kolejne twierdzenie wyjaśnia dlaczego prosta, a więc i płaszczyzna nie są zbiorami skończonymi.

Twierdzenie 3.15 *Każdy odcinek otwarty jest zbiorem nieskończonym.*

Dowód. Weźmy odcinek otwarty (ab). Skonstruujemy nieskończony ciąg punktów (c_n) taki, że:

$$\forall_n\ c_n \in (ab)\ i\ \forall_{k \neq l}\ c_k \neq c_l.$$

W tym celu niech $\mathbf{L}$ oznacza prostą wyznaczoną jednoznacznie przez parę punktów a, b. Ciąg (c_n) definiujemy przez indukcję:

$$c_1 = c,\ \text{gdzie}\ (a, c, b) \in \mathcal{B}\ (\text{aksjomat } \mathbf{O6}).$$

Przypuśćmy, że dla $n \geq 1$ znamy już c_n. Bierzemy $c_{n+1} \in \mathbf{L}$, gdzie $(a, c_{n+1}, c_n) \in \mathcal{B}$, co jest możliwe z wyboru c_n i aksjomatu **O6**. Pokażemy, że ciąg (c_n) ma pożądane własności. Aby wykazać, że $c_n \in (ab)$, wystarczy pokazać, że $(a, c_n, b) \in \mathcal{B}$. Zrobimy to przez indukcję. Dla $n = 1$ tak jest z wyboru c_1. Niech dla $n \geq 1$ będzie $(a, c_n, b) \in \mathcal{B}$. Pokażemy, że $(a, c_{n+1}, b) \in \mathcal{B}$. Z założenia i aksjomatu **O2** mamy:

$$(b, c_n, a) \in \mathcal{B} \ i \ (c_n, c_{n+1}, a) \in \mathcal{B},$$

skąd na mocy Wniosku 3.1 (1) mamy $(b, c_{n+1}, a) \in \mathcal{B}$, czyli $(a, c_{n+1}, b) \in \mathcal{B}$. Dlatego $c_n \in (ab)$ dla każdego naturalnego n. Aby wykazać, że wyrazy tego ciągu są parami różne, wystarczy pokazać, że

$$\forall_{m,n}\Big(m < n \Rightarrow (a, c_n, c_m) \in \mathcal{B}\Big).$$

Zrobimy to przez indukcję względem n. Zauważmy, że przypadek $n = 1$ jest spełniony (dlaczego?). Możemy więc założyć, że powyższe zdanie prawdziwe jest dla $n \geq 1$. Pokażemy, że

$$\forall_m\Big(m < n + 1 \Rightarrow (a, c_{n+1}, c_m) \in \mathcal{B}\Big).$$

Zachodzą dwa przypadki:

- $m = n$. Wtedy z konstrukcji c_{n+1} wynika wprost, że $(a, c_{n+1}, c_n) \in \mathcal{B}$.
- $m < n$. Teraz możemy skorzystać z założenia indukcyjnego i wtedy $(a, c_n, c_m) \in \mathcal{B}$. Ale $(a, c_{n+1}, c_n) \in \mathcal{B}$, więc z Wniosku 3.1 (2) $(c_m, c_{n+1}, a) \in \mathcal{B}$, czyli $(a, c_{n+1}, c_m) \in \mathcal{B}$, co należało pokazać.

□

Wniosek 3.2 *Każda prosta i każda płaszczyzna jest nieskończonym podzbiorem przestrzeni* **S**.

3.5 Półprosta

Weźmy prostą $\mathbf{L}$ i ustalmy punkt $a \in \mathbf{L}$. Na zbiorze $\mathbf{L} \setminus \{a\}$ definiujemy relację $\mathcal{R}_a$:

$$p\mathcal{R}_a q \Leftrightarrow \neg\Big((p,a,q) \in \mathcal{B}\Big).$$

Dalej będziemy czytali *punkty p, q leżą po tej samej stronie prostej* $\mathbf{L}$.

Uwaga 3.3 *Warunek $\neg\Big((p,a,q) \in \mathcal{B}\Big)$, przy założeniu, że a, p, q są współliniowe oznacza, że albo $p = q$, albo są różne i punkt a nie może leżeć pomiędzy punktami p, q.*

Twierdzenie 3.16 *$\mathcal{R}_a$ jest relacją równoważności.*

Dowód. Jeśli $p = q$, to relacja $(p,a,q) \in \mathcal{B}$ nie może zachodzić (aksjomat **O1**), co oznacza, że $\mathcal{R}_a$ jest zwrotna. Jeśli $p\mathcal{R}_a q$, to z aksjomatu **O2** i zasady transpozycji implikacji wynika, że $\neg\Big((q,a,p) \in \mathcal{B}\Big)$, czyli $q\mathcal{R}_a p$.

Dla dowodu przechodniości ustalmy $p, q, r \in \mathbf{L} \setminus \{a\}$ i niech $p\mathcal{R}_a q$ oraz $q\mathcal{R}_a r$. Zatem $\neg\Big((p,a,q) \in \mathcal{B}\Big)$ i $\neg\Big((q,a,r) \in \mathcal{B}\Big)$. Z aksjomatu **O4** (punkty p, a, q są różne i współliniowe) wynika, że wtedy

$$(a,q,p) \in \mathcal{B} \text{ albo } (a,p,q) \in \mathcal{B}.$$

Przypuśćmy, że $\neg\Big(p\mathcal{R}_a r\Big) \Leftrightarrow (p,a,r) \in \mathcal{B}$. Wtedy

$$(a,q,p) \in \mathcal{B} \text{ i } (p,a,r) \in \mathcal{B} \Rightarrow (q,a,r) \in \mathcal{B}$$

i ponieważ $q\mathcal{R}_a r$, więc ostatni warunek nie zachodzi. Dlatego $(a,p,q) \in \mathcal{B}$. Ale wtedy, ponieważ $(p,a,r) \in \mathcal{B}$, musi zachodzić $(q,a,r) \in \mathcal{B}$, co też jest niemożliwe. Dlatego $p\mathcal{R}_a r$, co kończy dowód.

$\square$

Twierdzenie 3.16 pozwala podzielić zbiór $\mathbf{L} \setminus \{a\}$ na parami rozłączne klasy abstrakcji. Kolejne twierdzenie wyjaśnia, że są tylko dwie takie klasy

Twierdzenie 3.17

$$\mathbf{L} \setminus \{a\} = [p_1]_{\mathcal{R}_a} \cup [p_2]_{\mathcal{R}_a},$$

gdzie

$$p \in [p_1]_{\mathcal{R}_a} \text{ i } q \in [p_2]_{\mathcal{R}_a} \Rightarrow (p,a,q) \in \mathcal{B}.$$

Dowód. Z aksjomatu **I1** istnieje punkt $p_1 \in \mathbf{L} \setminus \{a\}$. Z aksjomatu **O5** istnieje $p_2 \in \mathbf{L} \setminus \{a\}$, że $(p_1, a, p_2) \in \mathcal{B}$. W takim razie $[p_1]_{\mathcal{R}_a} \cap [p_2]_{\mathcal{R}_a} = \emptyset$, bowiem $\neg\Big(p_1 \mathcal{R}_a p_2\Big)$. Można pokazać, że innych klas nie ma, co kończy dowód.

□

Każdy ze zbiorów $[p_1]_{\mathcal{R}_a}, [p_2]_{\mathcal{R}_a}$ nazywamy *półprostą* wyznaczoną przez prostą $\mathbf{L}$ i punkt a. Wtedy a nazywamy *początkiem* tych półprostych, natomiast o tych półprostych będziemy mówili, że się *dopełniają*. Dalej symbolem $\mathbf{HL}(a)$ będziemy oznaczali jedną z tych półprostych. Tę drugą dopełniającą półprostą oznaczymy przez $\mathbf{HL}^\star(a)$. Wtedy

$$\mathbf{L} = \mathbf{HL}(a) \cup \mathbf{HL}^\star(a) \cup \{a\}.$$

Kolejne twierdzenie opisuje wzajemne położenie półprostych na prostej. Jak pokażemy dalej, własności te pozwolą nam zdefiniować na prostej jej orientację, a w efekcie relację porządku.

Twierdzenie 3.18 *Niech* $\mathbf{HL}(p)$ *i* $\mathbf{HL}(q)$ *będą półprostymi na prostej* $\mathbf{L}$ *odpowiadającymi punktom* p *i* q *oraz* $p \in \mathbf{HL}(q)$ *i* $q \in \mathbf{HL}^\star(p)$*. Wtedy zachodzi każdy z warunków:*

1.

$$\mathbf{HL}(p) \subset \mathbf{HL}(q).$$

2.

$$\mathbf{HL}^\star(q) \subset \mathbf{HL}^\star(p).$$

3.

$$\mathbf{HL}(p) \cap \mathbf{HL}^\star(q) = \emptyset.$$

4.

$$\mathbf{HL}^\star(p) \cap \mathbf{HL}(q) = (pq).$$

Dowód. Niech $a \in \mathbf{HL}(p)$. Ponieważ $q \in \mathbf{HL}^\star(p)$, punkt q jest z innej klasy abstrakcji relacji $\mathcal{R}_p$ aniżeli a. Dlatego $\neg\Big(a \mathcal{R}_p q\Big) \Leftrightarrow (a, p, q) \in \mathcal{B}$. Pokażemy, że $a \notin \mathbf{HL}^\star(q)$. W tym celu wystarczy pokazać, że $(r, q, a) \in \mathcal{B}$ dla dowolnego $r \in \mathbf{HL}^\star(q)$. Ale $r \in \mathbf{HL}^\star(q) \Rightarrow \neg\Big(r \mathcal{R}_q p\Big) \Leftrightarrow (r, q, p) \in \mathcal{B}$. Z aksjomatu

O7 z warunku $(a,p,q) \in \mathcal{B}$ i $(r,q,p) \in \mathcal{B}$ wynika, że $(r,q,a) \in \mathcal{B}$. Dlatego $a \notin \mathbf{HL}^\star(q)$, czyli $a \in \mathbf{HL}(q)$. (2) jest konsekwencją zasady transpozycji inkluzji i (1). Warunek (3) wynika wprost z warunków (1) i (2). Pozostaje wykazać (4). Weźmy $a \in \mathbf{HL}^\star(p) \cap \mathbf{HL}(q)$. Mamy wtedy $\neg\Big((a,p,q) \in \mathcal{B}\Big)$ i $\neg\Big((a,q,p) \in \mathcal{B}\Big)$. Z drugiej strony, z aksjomatu **O4** dla trzech różnych punktów a,p,q zachodzi jeden z warunków

$$(a,p,q) \in \mathcal{B},\ (p,q,a) \in \mathcal{B},\ (q,a,p) \in \mathcal{B}.$$

Dlatego $(q,a,p) \in \mathcal{B}$, co oznacza, że $q \in (pq)$. Na odwrót, jeśli $a \in (pq)$, to ponieważ $(p,a,q) \in \mathcal{B}$, z aksjomatu **O4**, oba warunki

$$(a,p,q) \in \mathcal{B},\ (p,q,a) \in \mathcal{B}$$

nie mogą zachodzić, co oznacza, że $a \in \mathbf{HL}^\star(p) \cap \mathbf{HL}(q)$.

□

Wprost z powyższego twierdzenia mamy praktyczne kryterium na zawieranie się półprostych

Wniosek 3.3 *Niech dane będą dwie półproste* $\mathbf{HL}(p)$ *i* $\mathbf{HL}(q)$*, gdzie* $p \neq q$*. Wtedy* $\mathbf{HL}(p) \subset \mathbf{HL}(q) \Leftrightarrow\ p \in \mathbf{HL}(q)$ *i* $q \notin \mathbf{HL}(p)$*.*

□

Dalej potrzebny nam będzie jeszcze jeden fakt wynikający z twierdzenia 3.18

Wniosek 3.4 *Niech dane będą dwie półproste* $\mathbf{HL}(p)$ *i* $\mathbf{HL}(q)$*, gdzie* $p \neq q$*. Jeśli* $\mathbf{HL}(p) \subset \mathbf{HL}(q)$*, to*

$$\begin{aligned} \mathbf{HL}(q) \setminus \{p\} &= (pq) \cup \mathbf{HL}(p), \\ (pq) \cap \mathbf{HL}(p) &= \emptyset. \end{aligned}$$

Dowód. Z własności półprostej i jej dopełnienia mamy

$$\mathbf{HL}(q) \setminus \{p\} = \Big(\mathbf{HL}(q) \setminus \{p\}\Big) \cap \Big(\mathbf{HL}(p) \cup \mathbf{HL}^\star(p)\Big),$$

skąd

$$\mathbf{HL}(q) \setminus \{p\} = \Big[\Big(\mathbf{HL}(q) \setminus \{p\}\Big) \cap \mathbf{HL}(p)\Big] \cup \Big[\Big(\mathbf{HL}(q) \setminus \{p\}\Big) \cap \mathbf{HL}^\star(p)\Big].$$

Z założenia pierwszy składnik powyższej sumy jest równy $\mathbf{HL}(p)$, drugi z warunku (4) twierdzenia 3.18 (pq), co daje pierwszy ze wzorów. Ponieważ $(pq) \subset \mathbf{HL}^\star(p)$, $(pq) \cap \mathbf{HL}(p) = \emptyset$.

□

Kolejne twierdzenie opisuje położenie trzech dowolnych półprostych na danej prostej.

Twierdzenie 3.19 *Niech* $\mathbf{HL}(p)$, $\mathbf{HL}(q)$, $\mathbf{HL}(r)$ *będą półprostymi zawartmi w prostej* $\mathbf{L}$. *Jeśli*

$$\mathbf{HL}(q) \subset \mathbf{HL}(p) \text{ } i \text{ } \mathbf{HL}(r) \subset \mathbf{HL}(p),$$

to

$$\mathbf{HL}(q) \subset \mathbf{HL}(r) \text{ } albo \text{ } \mathbf{HL}(r) \subset \mathbf{HL}(q).$$

Dowód. Zauważmy, że jeśli dwie z tych trzech półprostych są równe, to twierdzenie jest prawdziwe. Dlatego założymy, że są one parami różne. Z założenia wynika, że wśród tych półprostych nie ma prostych dopełniających. Dlatego przyjęcie założenia, że półproste te są parami różne oznacza, że punkty p, q, r są parami różne. Z wniosku 3.3 założenia naszego twierdzenia oznaczają teraz, że

$$\begin{array}{ccc} q \in \mathbf{HL}(p) & i & p \notin \mathbf{HL}(q), \\ r \in \mathbf{HL}(p) & i & p \notin \mathbf{HL}(r). \end{array}$$

Z kolei z wniosku 3.4 wynika, że wtedy

$$\begin{aligned} \mathbf{HL}(p) \setminus \{q\} &= (pq) \cup \mathbf{HL}(q), && (1) \\ (pq) \cap \mathbf{HL}(q) &= \emptyset && (2) \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \mathbf{HL}(p) \setminus \{r\} &= (pr) \cup \mathbf{HL}(r), && (3) \\ (pr) \cap \mathbf{HL}(r) &= \emptyset. && (4) \end{aligned}$$

Ponieważ $r, q \in \mathbf{HL}(p)$, więc

$$(p, r, q) \in \mathcal{B} \text{ } lub \text{ } (p, q, r) \in \mathcal{B}.$$

Gdyby $(p, r, q) \in \mathcal{B}$, to $r \in (pq)$ i z powyższego warunku (1), $r \notin \mathbf{HL}(q)$. Oznacza to, że $\neg\Big((p, q, r) \in \mathcal{B}\Big)$, więc z warunku (3), $q \in \mathbf{HL}(r)$. To z kolei, z wniosku 3.3 implikuje, że $\mathbf{HL}(q) \subset \mathbf{HL}(r)$. Podobnie, z warunku $(p, q, r) \in \mathcal{B}$ otrzymujemy, że $\mathbf{HL}(r) \subset \mathbf{HL}(q)$, co kończy dowód twierdzenia.

□

Nadamy teraz półprostym $\mathbf{HL}(p), \mathbf{HL}(q)$ $(p, q \in \mathbf{L})$ wspólną *orientację*. W tym celu na zbiorze $\mathfrak{HL}$–wszystkich półprostych prostej $\mathbf{L}$ zdefiniujemy relację

$$\mathbf{HL}(p)\mathcal{R}_o\mathbf{HL}(q) \Leftrightarrow \mathbf{HL}(p) \subset \mathbf{HL}(q) \text{ albo } \mathbf{HL}(q) \subset \mathbf{HL}(p).$$

Jeśli półproste $\mathbf{HL}(p), \mathbf{HL}(q)$ będą w relacji $\mathcal{R}_o$, to będziemy mówili, że są *zgodnie zorientowane*. Poniższe twierdzenia wyjaśnia, ze relacja ta jest relacją równoważności i opisuje jej klasy abstrakcji, które pozwalają zdefiniować orientację na prostej.

Twierdzenie 3.20 *$\mathcal{R}_o$ jest relacją równoważności. Wtedy zbiór $\mathfrak{HL}$ rozpada się na dwie klasy abstrakcji*

$$\mathfrak{HL} = \mathfrak{HL}_1 \cup \mathfrak{HL}_2,$$

gdzie dla dowolnych półprostych $\mathbf{HL}_1 \in \mathfrak{HL}_1$, $\mathbf{HL}_2 \in \mathfrak{HL}_2$, nie są one zgodnie zorientowane.

<u>Dowód.</u> Weźmy dowolny punkt $p \in \mathbf{L}$. Wtedy $\mathbf{L} = \{p\} \cup \mathbf{HL}(p) \cup \mathbf{HL}^\star(p)$ i dlatego $\neg\Big(\mathbf{HL}(p)\mathbf{R}_o\mathbf{HL}^\star(p)\Big)$. Wystarczy pokazać, że

$$\mathfrak{HL} = \Big[\mathbf{HL}(p)\Big]_{\mathcal{R}_o} \cup \Big[\mathbf{HL}^\star(p)\Big]_{\mathcal{R}_o}.$$

Weźmy $q \neq p$ i półprostą $\mathbf{HL}(q)$. Pokażemy, że należy ona do jednej z klas abstrakcji. Zachodzą tylko cztery przypadki:

1.
$$p \in \mathbf{HL}(q),\ q \in \mathbf{HL}(p),$$

2.
$$p \in \mathbf{HL}(q),\ q \in \mathbf{HL}^\star(p),$$

3.
$$p \in \mathbf{HL}^\star(q),\ q \in \mathbf{HL}(p),$$

4.
$$p \in \mathbf{HL}^\star(q),\ q \in \mathbf{HL}^\star(p).$$

Z wniosku 3.3 mamy wtedy odpowiednio:

1.
$$\mathbf{HL}^\star(p) \subset \mathbf{HL}(q),$$

2.
$$\mathbf{HL}(p) \subset \mathbf{HL}(q),$$

3.
$$\mathbf{HL}(q) \subset \mathbf{HL}(p),$$

4.
$$\mathbf{HL}^{\star}(q) \subset \mathbf{HL}^{\star}(p),$$

co należało wykazać.

□

Niech dalej
$$\mathfrak{O}_1 = \Big[\mathbf{HL}(p)\Big]_{\mathcal{R}_o}, \ \mathfrak{O}_2 = \Big[\mathbf{HL}^{\star}(p)\Big]_{\mathcal{R}_o}.$$

Każdy z tak zdefiniowanych zbiorów $\mathfrak{O}_1, \mathfrak{O}_2$ nazwiemy *orientacją* lub *zwrotem* prostej $\mathbf{L}$. Wtedy $\mathfrak{O}_2$ ($\mathfrak{O}_1$) będziemy nazywali *orientacją przeciwną* do $\mathfrak{O}_1$ ($\mathfrak{O}_2$). Jeśli teraz $\mathbf{HL}(a)$ jest jakąś półprostą, to może ona mieć albo orientację $\mathfrak{O}_1$, albo przeciwną do niej–$\mathfrak{O}_2$.

Prostą $\mathbf{L}$ z wyróżnioną orientacją, czyli parę uporządkowaną

$$\mathbf{O}_1 = \Big(\mathbf{L}, \mathfrak{O}_1\Big), \ \mathbf{O}_2 = \Big(\mathbf{L}, \mathfrak{O}_2\Big)$$

będziemy nazywali *prostą zorientowaną* lub *osią*.

Zatem każdej prostej $\mathbf{L}$ odpowiada para przeciwnie zorientowanych osi: $\mathbf{O}_1$, $\mathbf{O}_2$. Będziemy też pisali $\mathbf{O}_2 = \mathbf{O}_1{}^{\star}$.

Pozwala to nam zdefiniować na prostej $\mathbf{L}$ relację porządku, a więc relację częściowego porządku, dla której każde dwa punkty prostej są ze sobą w tej relacji. W tym celu ustalmy na prostej orientację, czyli weźmy $\mathbf{O} = \Big(\mathbf{L}, \mathfrak{O}\Big)$. Wtedy $p \in \mathbf{O}$ oznacza, że $p \in \mathbf{L}$. Weźmy półproste odpowiadające punktowi p: $\mathbf{HL}(p)$ i $\mathbf{HL}^{\star}(p)$. Wtedy tylko jedna z tych półprostych ma orientację $\mathbf{O}$.
W takim razie każdy punkt $p \in \mathbf{L}$ na osi jednoznacznie wyznacza półprostą. Dalej tak zorientowaną półprostą będziemy oznaczali przez $\mathbf{L}_p$.

Na $\mathbf{O}$ definiujemy relację $\preceq$, gdzie

$$\forall_{p,q \in \mathbf{L}} \ p \preceq q \Leftrightarrow \mathbf{L}_q \subset \mathbf{L}_p.$$

Jeśli dodatkowo $p \neq q$, to będziemy pisali $p \prec q$.

Twierdzenie 3.21 *$\preceq$ jest relacją porządku.*

<u>Dowód.</u> Z definicji $\preceq$ jest zwrotna. Jeśli $p \preceq q$ i $q \preceq p$, to $\mathbf{L}_q = \mathbf{L}_p$, co z jednoznaczności oznacza, że $p = q$. Ponieważ $\mathbf{L}_p \subset \mathbf{L}_q$ i $\mathbf{L}_q \subset \mathbf{L}_r$ implikuje, że $\mathbf{L}_p \subset \mathbf{L}_r$, więc $\preceq$ jest przechodnia. Wreszcie, jeśli $p, q \in \mathbf{O}$, to dla półprostych $\mathbf{L}_p, \mathbf{L}_q$ mamy: albo $\mathbf{L}_p \subset \mathbf{L}_q$, albo $\mathbf{L}_q \subset \mathbf{L}_p$, bowiem posiadają tę samą orientację, co dowodzi, że $\preceq$ jest relacją porządku.

□

Poniższe twierdzenie wyjaśnia znaczenie tego porządku w kontekście relacji $\mathcal{B}$, która jak pamiętamy, również porządkowała prostą.

Twierdzenie 3.22 *Niech dana będzie oś* $\mathbf{O}$ *z porządkiem* $\preceq$*. Wtedy:*

1.

$$\forall_{p \in \mathbf{L}}\ \mathbf{L}_p = \{a \in \mathbf{L}\colon\ p \prec a\}.$$

2.

$$\forall_{p,q \in \mathbf{L}}\ p \prec q \Rightarrow (pq) = \{a \in \mathbf{L}\colon\ p \prec a \prec b\}.$$

3.

$$\forall_{p,q,r \in \mathbf{L}}\ (p, q, r) \in \mathcal{B} \Leftrightarrow p \prec q \prec r \textit{ lub } r \prec q \prec p.$$

4.

$\mathbf{O}$ *nie ma elementu pierwszego i ostatniego.*

5. *$\preceq$ jest relacją gęstą, tzn.*

$$\forall_{p,q \in \mathbf{L}}\ p \prec q \Rightarrow\ \exists_{r \in \mathbf{L}}\ p \prec r \prec q.$$

<u>Dowód.</u>

1. Weźmy półprostą $\mathbf{L_p}$ na osi $\mathbf{O}$. Jeśli $a \in \mathbf{L}$ i $p \prec a$, to $\mathbf{L}_a \subset \mathbf{L}_p$. Z wniosku 3.3 wynika, że wtedy $a \in \mathbf{L}_p$. Na odwrót, niech $a \in \mathbf{L}_p$ i weźmy półprostą $\mathbf{L}_a$. Wtedy $\mathbf{L}_a \subset \mathbf{L}_p$, albo $\mathbf{L}_p \subset \mathbf{L}_a$. Gdyby $\mathbf{L}_p \subset \mathbf{L}_a$, to $p \in \mathbf{L}_a$ i $a \notin \mathbf{L}_p$, co jest niemożliwe. Dlatego $\mathbf{L}_a \subset \mathbf{L}_p$, czyli $p \prec a$.

2. Niech $p \prec q$, czyli $\mathbf{L}_q \subset \mathbf{L}_p$ $(p \neq q)$. Z wniosku 3.4

   $$(pq) \cap \mathbf{L}_q = \emptyset,\ (pq) \cap \mathbf{L}_p^\star = \emptyset,$$

   co z własności (1) dowodzonego twierdzenia wynika, że

   $$a \in (pq) \Leftrightarrow p \prec a \prec q.$$

3. Niech p, q, r będą takie, że $(p, q, r) \in \mathcal{B}$. Wtedy z **O1** punkty te są różne i współliniowe. Jeśli $p \prec r$, to ponieważ $q \in (pr)$, z warunku (2) wynika, że $p \prec q \prec r$. Jeśli $r \prec p$, to $r \prec q \prec p$.

Dla dowodu twierdzenia wystarczy zauważyć, że (4) wynika z **O5** i z (3), warunek (5)–z **O6** i z (3).

□

3.6 Aksjomat Euklidesa

Omówione przez nas aksjomaty: incydencji, uporządkowania odnoszące się do relacji $\mathcal{B}$ i $\mathcal{D}$ oraz aksjomat ciągłości definiują tzw. *geometrię absolutną*. Geometria Euklidesa powstaje z geometrii absolutnej w wyniku rozszerzenia zbioru aksjomatów o jeden aksjomat, zwany *aksjomatem Euklidesa* (będziemy pisali aksjomat **E**). Przed jego sformułowaniem będziemy potrzebowali jeszcze kilku pojęć.

Niech dana będzie płaszczyzna π i $p \in \pi$. Zbiór wszystkich półprostych o początku w punkcie p i leżących na płaszczyźnie π nazywamy *pękiem* wyznaczonym przez p. Wtedy p jest *wierzchołkiem pęku*. Weźmy pęk prostych o wierzchołku p oraz wybierzmy z tego pęku dwie różne proste $\mathbf{L_1}$ i $\mathbf{L_2}$. Wtedy zbiór $\{\mathbf{HL}_1, \mathbf{HL}_2\}$, gdzie półproste $\mathbf{HL}_1, \mathbf{HL}_2$ nie dopełniają się, nazywamy *kątem*. Wówczas półproste $\mathbf{HL}_1, \mathbf{HL}_2$ nazywamy *ramionami* tego kąta, punkt p–jego *wierzchołkiem*. Jeśli $a \in \mathbf{HL}_1$, $b \in \mathbf{HL}_2$, to kąt ten oznaczymy przez $\measuredangle apb$ albo $\measuredangle bpa$.

Weźmy teraz trzy niewspółliniowe punkty $p, q, r \in S$. Wtedy zbiór $\{p, q, r\}$ nazywamy *trójkątem*. Niech π będzie (jedyną) płaszczyzną zawierającą trójkąt $\{p, q, r\}$. Wtedy p, q, r nazwiemy *wierzchołkami* trójkąta. W takim razie mamy trzy kąty przypisane tym wierzchołkom, które oznaczymy odpowiednio przez: $\measuredangle p$, $\measuredangle q$ i $\measuredangle r$.

Aksjomat Euklidesa

Dla dowolnej płaszczyzny π, prostej $L \subset \pi$ i dowolnego punktu $a \in \pi \setminus L$ istnieje **co najwyżej** *jedna prosta $L_o \subset \pi$, że $a \in L_o$ i $L \cap L_o = \emptyset$.*

Okazuje się, że treść powyższego zapisu nie wynika ze zbioru dotychczasowych aksjomatów. Z drugiej strony, co można udowodnić, z aksjomatów tych wynika następujące twierdzenie

Twierdzenie 3.23 *Dla dowolnej płaszczyzny π, prostej $L \subset \pi$ i dowolnego punktu $a \in \pi \setminus L$ istnieje* **co najmniej** *jedna prosta $L_o \subset \pi$, że $a \in L_o$ i $L \cap L_o = \emptyset$.*

W takim razie, z twierdzenia 3.2.3 i aksjomatu **E** mamy

Wniosek 3.5 *Dla dowolnej płaszczyzny π, prostej $L \subset \pi$ i dowolnego punktu $a \in \pi \setminus L$ istnieje* **dokładnie** *jedna prosta $L_o \subset \pi$, że $a \in L_o$ i $L \cap L_o = \emptyset$.*

Można też udowodnić, że dobrze znany fakt z lekcji geometrii szkolnej na temat sumy kątów w trójkącie również można wyprowadzić dopiero (i tylko) z aksjomatu **E**. Mamy bowiem

Wniosek 3.6 *W każdym trójkącie $\{p, q, r\}$,*

$$\measuredangle p + \measuredangle q + \measuredangle r = 180^o.$$

Możemy też na zbiorze $\mathcal{L}$ wszystkich prostych w S zdefiniować relację oznaczaną symbolicznie przez $||$, gdzie

$$\forall_{L_1, L_2 \in \mathcal{L}} \ \ L_1 || L_2 \Leftrightarrow \ \exists_\pi \ L_1, L_2 \subset \pi, \ \ L_1 \cap L_2 = \emptyset,$$

którą czytamy *prosta L_1 jest równoległa do prostej L_2.*

Wtedy kolejny wniosek z aksjomatu **E**, dotyczący równoległości mówi, że

Wniosek 3.7 *Dla każdej prostej $L \subset \pi$, dla każdego punktu $a \in S$ istnieje dokładnie jedna prosta L_o,*

$$a \in L_o \ i \ L || L_o.$$