

$$E\mathbf{X}^2 - (E\mathbf{X})^2 + E\mathbf{Y}^2 - (E\mathbf{Y})^2 = \text{var}(\mathbf{X}) + \text{var}(\mathbf{Y}),$$

gdzie skorzystaliśmy z uwagi 3.3.3, co daje własność (1) twierdzenia.

Podobnie

$$\text{var}(a\mathbf{X}) = E(a\mathbf{X})^2 - (E(a\mathbf{X}))^2 = a^2 E\mathbf{X}^2 - a^2 (E\mathbf{X})^2,$$

co daje (2).

Wreszcie, ponieważ wartość oczekiwana ze stałej jest tą stałą, mamy (3).

Przykład 3.3.5 Weźmy rozkład z Przykładu 3.3.1, tzn. $\mathbf{X}$ ma rozkład dyskretny, gdzie $x_n = n$, $p_n = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$ dla danej liczby dodatniej λ i liczb całkowitych nieujemnych n . Jak wiemy, wtedy $E\mathbf{X} = \lambda$. Obliczmy drugi moment dla tego rozkładu. Ponieważ

$$E\mathbf{X}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \frac{\lambda^n}{n!} =$$

$$e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{\lambda^n}{n!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} =$$

Podstawiając $m = n - 1$ dostaniemy

$$\lambda e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) \frac{\lambda^m}{m!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} m \frac{\lambda^m}{m!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} =$$

$$\lambda E\mathbf{X} + \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda^2 + \lambda.$$

Stąd

$$\text{var}(\mathbf{X}) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$