

Przykład 2.3.6 Dwóch strzelców celuje do wspólnej tarczy i oddaje strzały. Wiadomo, że w określonym czasie pierwszy z nich jest w stanie średnio oddać n_1 strzałów, drugi n_2 . Z obserwacji celności oddanych strzałów wynika, że skuteczność pierwszego jest na poziomie $p_1\%$, drugiego $p_2\%$. Podczas sesji strzeleckiej trafiono w tarczę. Obliczyć prawdopodobieństwo, że uczynił to strzelec drugi.

Oznaczmy przez C_1 i C_2 zdarzenia polegające na tym, że strzelec pierwszy i odpowiednio drugi wystrzelił do tarczy. Z treści zadania wynika, że możemy przyjąć:

$$\frac{P(C_1)}{P(C_2)} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Niech B oznacza zdarzenie, że wystrzelony pocisk trafił w tarczę. Z założenia

$$P(B|C_1) = \frac{p_1}{100}, \quad P(B|C_2) = \frac{p_2}{100}.$$

Interesuje nas prawdopodobieństwo a posteriori $P(C_2|B)$, które wyliczymy ze wzoru Bayesa

$$P(C_2|B) = \frac{P(B|C_2)P(C_2)}{P(B)},$$

gdzie prawdopodobieństwo a priori obliczymy ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite

$$P(B) = P(B|C_1)P(C_1) + P(B|C_2)P(C_2).$$

Dlatego

$$P(C_2|B) = \frac{P(B|C_2)P(C_2)}{P(B|C_1)P(C_1) + P(B|C_2)P(C_2)} = \frac{p_2 \frac{n_2}{n_1} P(C_1)}{p_1 P(C_1) + p_2 \frac{n_2}{n_1} P(C_1)},$$

co po uporządkowaniu daje

$$P(C_2|B) = \frac{n_2 p_2}{n_1 p_1 + n_2 p_2}.$$

Przypuśćmy teraz, że mamy co najmniej trzy zdarzenia, czyli n -elementową podrodzinę $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ rodziny Σ .

Definicja 2.3.3 Powiemy, że $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ jest rodziną zdarzeń stochastycznie niezależnych, jeśli dla dowolnego wyboru elementów tej rodziny $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$, $2 \leq k \leq n$, zachodzi równość

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k}).$$