Inne zastosowania modelu produktowego pokażemy w kolejnym podrozdziale.

Prawdopodobieństwo geometryczne

Zaczniemy od omówienia przypadku *jednowymiarowego.* Niech $\Omega = [a,b]$, gdzie $a < b$. Za σ-ciało Σ weźmy ślad σ-ciała borelowskiego $\mathcal{B}_{\mathbf{R}}$ na przedziale $[a,b]$. Funkcję prawdopodobieństwa definiujemy następująco:

$$P(A) = \frac{\int_A dx}{\int_{[a,b]} dx} = \frac{\int_A dx}{b-a}$$

W szczególności, jeżeli $A = [\alpha, \beta)$, gdzie $a < \alpha < \beta < b$, to

$$P(A) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$$

W sytuacji *dwuwymiarowej* bierzemy:

$$\Omega = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2],$$

za Σ, σ-ciało produktowe σ–ciał powstałych z przestrzeni $[a_i, b_i]$.

Typowe zdarzenie w takiej przestrzeni ma postać

$$A = \{(x,y) \in \Omega : x \in [a_1, b_1],\ d(x) \le y \le g(x)\},$$

gdzie d *i* g są funkcjami ciągłymi określonymi na odcinku $[a_1, b_1]$.

Wtedy prawopodobieństwo takiego zdarzenia wynosi

$$P(A) = \frac{\int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{d(x)}^{g(x)} dy \right) dx}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)} = \frac{\int_{a_1}^{b_1} (g(x) - d(x)) dx}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)} .$$

Z geometrycznego punktu widzenie prawdopodobieństwo to jest ilorazem powierzchni opisanej zdarzeniem A i prostokąta Ω. Stąd też wzięła się nazwa tego modelu–model geometryczny.

Przykład 2.3.9 *Z odcinka* $[-1, 1]$ *losujemy dwie liczby* p *i* q. *Obliczyć prawdopodobieństwo, że* $x^2 + px + q > p$ *dla każdego rzeczywistego* x.

Wylosowanie każdej pary liczb $(p, q) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ *oznacza, że możemy napisać powyższą nierówność, która jest równoważna natępującej*

$$x^2 + px + q - p > 0.$$

Zdarzenie A, elementami którego są wszystkie te pary (p, q), że

$$p^2 - 4(q - p) < 0,$$

gwarantuje nam, że nierówność która jest obiektem naszego zainteresowania będzie tożsamością. W takim razie problem sprowadza się do wyznaczenia prawdopodobieństwa zdarzenia A. Jest to zdarzenie należące do σ–ciała zdefiniowanego w przypadku modelu geometrycznego. Dokładniej, (szczegóły pozostawiamy Czytelnikowi) traktując q jako funkcję p możemy zapisać je następująco

$$A = \{(p, q) \in [-1, 1] \times [-1, 1]\colon \ p \in [-1, 1],\ d(p) < q \leq 1\},$$

gdzie d oznacza funkcję ciągłą argumentu p daną wzorem

$$d(p) = \begin{cases} \frac{1}{4}p^2 + p, & -1 \leq p \leq -2 + 2\sqrt{2}; \\ 1, & -2 + \sqrt{2} \leq p \leq 1. \end{cases}$$

Zgodnie z definicją modelu geometrycznego $P(A) = \frac{1}{4}|A|$, gdzie $|A|$ oznacza pole figury A. Pole to obliczymy wykorzystując rachunek całkowy. Dostaniemy kolejno

$$|A| = \int_{-1}^{1} \Big(\int_{d(p)}^{1} dq \Big) dp = \int_{-1}^{1} (1 - d(p)) dp.$$

Definicja funkcji d zmusza nas do skorzystania z zasady addytywności dla całki. Ponieważ druga całka będzie równa zero, więc

$$|A| = \int_{-1}^{-2+2\sqrt{2}} (1 - \frac{1}{4}p^2 - p) dp = p - \frac{1}{12}p^3 - \frac{1}{2}p^2]_{-1}^{-2+2\sqrt{2}} \cong 0,2.$$

Stąd $P(A) \cong 0,05$.

Dalej pokażemy praktyczne zastosowania tych modeli.