Ciągi i szeregi funkcyjne (wykład w ramach kursu AMiAL na kierunku Informatyka)

13 stycznia 2010

Definicja 1. Niech $\mathcal{F}$ oznacza zbiór funkcji rzeczywistych określonych na wspólnym podzbiorze A. Przyporządkowanie

$$\mathbb{N} \ni n \longrightarrow f_n \in \mathcal{F}$$

będziemy krótko oznaczali przez (f_n) i nazywali *ciągiem funkcyjnym.* Wtedy funkcję f_n nazwiemy n–tym *wyrazem* tego ciągu.

Przykład 1.

$$f_n(x) = x^n,\ x \in \mathbf{R},\ n \in \mathbb{N},$$
$$g_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,\ x \in \mathbf{R},\ n \in \mathbb{N},$$
$$h_n(x) = \sin\frac{x}{n},\ x \in [0, \pi/2],\ n \in \mathbb{N}.$$

Powyższe wzory definiują trzy ciągi funkcyjne: (f_n), (g_n) i (h_n).

Definicja 2. Jeżeli ciąg funkcyjny (S_n) określony jest następująco

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x),\ \text{gdzie } f_j \in \mathcal{F},$$

to (S_n) nazywamy *szeregiem funkcyjnym.* Dalej szeregi funkcyjne będziemy zapisywali w postaci $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, czyli

$$(S_n) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$

f_n nazywamy wtedy n–tym *wyrazem*, S_n, n–tą *sumą częściową* szeregu.

Uwaga 1. Częściej będziemy pisali $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$. Wtedy $S_o = f_o$ nazwiemy *zerowym wyrazem* szeregu.

Przykład 2.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n,\ x \in \mathbf{R}.$$

Wtedy

$$f_n(x) = x^n,\ n \geq 0$$

oraz

$$S_n(x) = \sum_{0}^{n} x^n = \begin{cases} \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, & \text{dla } x \neq 1, \\ n+1 & \text{dla } x = 1. \end{cases}$$

Definicja 3. Szereg funkcyjny postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_o)^n,\ x \in \mathbf{R}$$

nazywamy *szeregiem potęgowym.* Wtedy x_o nazywa się jego *środkiem*, (a_n)– *ciągiem współczynników.*

Przykład 3.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (x+1)^n,$$

są przykładami szeregów funkcyjnych, dla których odpowiednio: $x_o = 0$ i -1, $a_n = 1,\ n \geq 0$ oraz $a_n = (-1)^n,\ n \geq 1$, $a_o = 0$.

Definicja 4. Niech dany będzie ciąg funkcyjny (f_n) oraz weźmy zbiór

$$\mathcal{O} = \{x \in A\colon\ (f_n(x)) \text{ jest zbieżnym ciągiem liczbowym}\}.$$

Wtedy $\mathcal{O}$ będziemy nazywali *obszarem zbieżności* tego ciągu.

Załóżmy, że $\mathcal{O} \neq \emptyset$. Możemy teraz zdefiniować odwzorowanie $f_o\colon\ \mathcal{O} \to \mathbf{R}$, gdzie

$$f_o(x) = \lim_n f_n(x).$$

Tak zdefiniowaną funkcję f_o nazywamy *granicą ciągu na zbiorze* $\mathcal{O}$. Jeśli $\mathcal{O} = A$, to będziemy mówili, że ciąg (f_n) jest *zbieżny punktowo* do f_o. Dla szeregu funkcyjnego będziemy pisali $S(x) = \lim_n S_n(x)$, gdzie funkcję S nazywamy *sumą* szeregu.

Przykład 4. Zbadamy zbieżność poniższych ciągów funkcyjnych.

$$f_n(x) = x^n,\ x \in \mathbf{R}.$$

Z własności ciągu geometrycznego wynika, że

$$\lim_n x^n = \begin{cases} 1, & x = 1, \\ 0, & |x| < 1, \end{cases}$$

oraz dla $x \notin (-1,1]$ granica nie istnieje.
Dlatego $\mathcal{O} = (-1,1]$ oraz $f_o(x) = \begin{cases} 1, & x = 1, \\ 0, & |x| < 1. \end{cases}$

Dla ciągu

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

z twierdzenia o liczbie e dostaniemy

$$f_n(x) = \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x \longrightarrow e^x,$$

o ile $x \neq 0$. W przeciwnym razie $f_n(0) = 1 \longrightarrow 1 = e^0$. Dlatego w tym przypadku $\mathcal{O} = \mathbf{R}$ i eksponenta jest granią tego ciągu.

Na koniec weźmy szereg funkcyjny $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ dla $x \in \mathbf{R}$. Z przykładu 2 wiemy, że ciąg S_n jest zbieżny na przedziale $(-1,1)$ do funkcji $\frac{1}{1-x}$. Dlatego możemy napisać

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \; x \in (-1,1).$$

Następujące twierdzenie opisuje obszar zbieżności szeregu potęgowego

Twierdzenie 1 (Cauchy–Hadamarda o kole zbieżności) Niech dany będzie szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_o^n)$. Wtedy istnieje liczba nieujemna r zwana *promieniem koła zbieżności*, że

$$(x_o - r, x_o + r) \subset \mathcal{O}$$

oraz oba powyższe zbiory różnią się co najwyżej o zbiór $\{x_o - r, x_o + r\}$. Wówczas przedział $(x_o - r, x_o + r)$ nazywamy *kołem zbieżności* szeregu. Co więcej, wartość promienia r można obliczyć z tzw. wzoru Cauchy'ego–Hadamarda

$$r = \frac{1}{\lambda}, \; \lambda = \lim_n |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_n |\frac{a_{n+1}}{a_n}|,$$

gdzie z definicji przyjmuje się, że $r = 0$ dla $\lambda = \infty$ oraz $r = \infty$ dla $\lambda = 0$.

Przykład 5. Wyznaczymy koła zbieżności dla danych szeregów. Dla $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$ mamy $a_n = 2^n$, więc $(2^n)^{\frac{1}{n}} = 2 \longrightarrow 2 = \lambda$, co oznacza, że $r = \frac{1}{2}$ i koło jest postaci $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, bowiem $x_o = 0$.

Jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(x+1)^n$, to ponieważ $a_o = 0$, $a_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$ oraz $x_o = -1$, ze wzoru na promień dostaniemy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \longrightarrow 1 = \lambda,$$

co oznacza, że $r = 1$ i koło zbieżności ma postać $(-2, 0)$.

Kolejne twierdzenie wyjaśnia, że *suma szeregu potęgowego*, czyli funkcja $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_o)^n$, dla którego $r > 0$ jest funkcją bardzo regularną–można ją całkować i dowolną ilość razy różniczkować.

Twierdzenie 2. (o różniczkowaniu i całkowaniu sumy szeregu)
Niech $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_o)^n$ dla $x \in (x_o - r, x_o + r)$, gdzie $r > 0$.
Wtedy:

(1) S jest różniczkowalna na kole zbieżności oraz zachodzi wzór

$$S'(x) = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_o)^n\Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_o)^{n-1},$$

co oznacza, że różniczkując szereg potęgowy można to robić *wyraz po wyrazie.*

(2) S można całkować po każdym przedziale zawartym w kole zbieżności tego szeregu. W szczególności dla każdego $t \in (x_o - r, x_o + r)$ mamy

$$\int_{x_o}^{t} S(x)dx = \int_{x_o}^{t} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_o)^n\Big)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{x_o}^{t} (x - x_o)^n)dx,$$

co oznacza, że całkowanie szeregu sprowadza się do *całkowania wyraz po wyrazie.*

Wniosek 1. Zauważmy, że po zróżniczkowaniu szeregu potęgowego dostajemy ponownie szereg potęgowy, bowiem z twierdzenia 1

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_o)^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty}(m + 1)a_{m+1}(x - x_o)^m,$$

gdzie dokonaliśmy podstawienia $m = n - 1$. W takim razie

$$S'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(x - x_o)^m, \text{ gdzie } b_m = (m + 1)a_{m+1}.$$

Co więcej, wtedy promień koła zbieżności tego nowego szeregu potęgowego też jest równy r. Oznacza to, że funkcję S' można dalej różniczkować. Oznacza to, że suma szeregu potęgowego jest funkcją nieskończenie wiele razy różniczkowalną w swoim kole zbieżności.

Definicja 5. Każdą funkcję rzeczywistą f określoną na przedziale I będącą nieskończenie razy różniczkowalną będziemy nazywali *funkcją analityczną.* Dalej w takim przypadku będziemy pisali $f \in \mathcal{A}$. Niech $f^{(n)}$ oznacza pochodną rzędu n funkcji f, gdzie z definicji $f^{(0)} = f$. Wtedy szereg potęgowy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x - x_o)^n, \text{ dla } x_o \in I$$

będziemy nazywali *szeregiem Taylora* funkcji f w punkcie x_o. Przez $\mathcal{A}_o$ oznaczymy zbiór tych $f \in \mathcal{A}$, że zachodzi równość $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x - x_o)^n$ dla $x \in I$. W takim przypadku będziemy mówili, że funkcja f *rozwija się* w swój szereg potęgowy wokół punktu x_o.

Twierdzenie 3. (o rozwinięciu w szereg potęgowy funkcji elementarnej) Zachodzi inkluzja $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}_o$. Co więcej, jeśli

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_o)^n \text{ dla } x \in I, \text{ to } a_n = \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!},$$

co oznacza, że rozwinęcie w szereg potęgowy każdej funkcji elementarnej jest jednoznaczne.

Przykład 6. Pokażemy teraz podstawowe techniki rozwijania funkcji elementarnych. Zaczniemy od kilku podstawowych wzorów. Dowodzi się, że:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \ x \in \mathbf{R},$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ x \in \mathbf{R},$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \ x \in \mathbf{R}.$$

Zróżniczkujemy teraz funkcję sin. Z twierdzenia o różniczkowaniu szeregu potęgowego dostaniemy

$$(\sin x)' = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \Big) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \frac{x^{2n}}{(2n+1)!},$$

co po uproszczeniu daje

$$(\sin x)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x.$$

Oczywiście wynik ten jest nam dobrze znany z kursu analizy.

Znajdziemy rozwinięcie funkcji $f(x) = \ln(1 + x)$, $x > -1$ wokół zera. W tym celu zauważmy, że f jako złożenie funkcji elementarnych właściwych, jest funkcją elementarną. W takim razie dla pewnego $r > 0$ mamy

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \ x \in (-r, r).$$

Z jednoznaczności takiego rozwinięcia wystarczy znaleźć wartości współczynników a_n. W tym celu najpierw zróżniczkujemy naszą funkcję

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \ x > -1.$$

Ponieważ

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, \ |x| < 1,$$

więc biorąc dowolne $0 < t$ i całkując ostatnią równość po przedziale $[0,t]$ dostaniemy

$$\int_o^t f'(x)dx = \int_0^t \Big(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\Big)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}]_0^t,$$

czyli

$$\int_o^t f'(x)dx = \sum_0^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}t^{n+1}.$$

Ale $f(0) = 1$, więc całka po lewej stronie jest równa $f(t)$. Wracając do zmiennej $t = x$ i zamieniając zmienne w ostatnim szeregu ($m = n+1$) dostaniemy

$$\ln(1+x) = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{x^m}{m}, \ |x| < 1,$$

co daje poszukiwane rozwinięcie. Można pokazać, że rowinięcie to prawdziwe jest również dla $x = 1$. Po podstawieniu $x = 1$ dostaniemy

$$\ln 2 = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{1}{m}.$$

Zatem suma szeregu *aharmonicznego* jest równa $\ln 2$. Wykorzystując rozwinięcie eksponenty widzimy, że

$$e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}.$$

Rozwiniemy teraz w szereg liczbowy liczbę π. W tym celu znajdziemy najpierw rozwinięcie w szereg potęgowy funkcji $f(x) = \arctan x$. Postąpimy jak wyżej– najpierw tę funkcję zróżniczkujemy

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}, \ |x| < 1.$$

Po scałkowaniu stronami po przedziale $[0,t]$ dla $|t| < 1$ dostaniemy

$$f(t) - f(0) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}t^{2n+1},$$

skąd

$$\arctan t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} t^{2n+1} \text{ dla } |t| < 1.$$

Można pokazać, że ostatni wzór prawdziwy jest również dla $t = 1$, więc

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1},$$

czyli

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} 4 \cdot (-1)^n \frac{1}{2n+1}.$$

Na koniec pokażemy technikę rozwijania funkcji wymiernej. W tym celu weźmy funkcję $f(x) = \frac{x}{(x-1)(x+2)}$. Najpierw należy rozłożyć ją na *ułamki proste*, czyli

$$\frac{x}{(x-1)(x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}.$$

Mnożąc stronami ostatnią równość przez $(x-1)(x+2)$ dostaniemy

$$x = (a+b)x + 2a - b,$$

co oznacz, że $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3}$. Rozwiniemy teraz każdy z otrzymanych ułamków

$$\frac{1}{x-1} = -\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1) x^n, \ |x| < 1,$$

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(-\frac{x}{2} \Big)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^n, \ |x| < 2.$$

Łącząc te dwa rozwinięcia otrzymamy

$$\frac{x}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1) x^n + \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^n,$$

co należy zapisać następująco

$$\frac{x}{(x-1)(x+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(-\frac{1}{3} + \frac{(-1)^n}{3 \cdot 2^n} \Big) x^n, \ |x| < 1.$$

Ćwiczenia

(1) Zbadać zbieżność ciągu funkcyjnego $(\sin\frac{x}{n})$, $x \in \mathbf{R}$.
(2) Wyznaczyć koło zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.
(3) Korzystając z rozwinięcia funkcji e^x znaleźć pochodną tej funkcji.
(4) Rozwinąć funkcję $\ln(2+x)$ wokół zera.
(5) Rozwinąć funkcję $f(x) = \frac{x+1}{x^2-x+2}$ wokół zera.
(6) Znaleźć funkcję pierwotną do $\frac{\sin x}{x}$. Wskazówka: wykorzystać rozwinięcie funkcji $\sin x$.