Zarządzanie i Inżynieria Produkcji studia stacjonarne

Konspekt do wykładu z Matematyki 1[1]
Postać trygonometryczna liczby zespolonej – zastosowania i przykłady

1 Wprowadzenie

Zaczniemy od przypomnienia podstawowych faktów poznanych na poprzednim wykładzie:

1. każdej liczbie zespolonej $z = a + b\mathbf{i}$, $z \neq 0$ można przyporządkować dokładnie jedną parę liczb (ϱ, φ), gdzie $\varrho > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$,

2. wtedy $\varrho = |z|$, $\varphi = argz$ – nazywamy *argumentem głównym* liczby z,

3. dla argumentu głównego φ liczby zespolonej z definiujemy *zbiór argumentów* liczby zespolonej $Argz$, gdzie
$$Argz = \{\alpha \in \mathbf{R}\colon \ \alpha = \varphi + 2k\pi \ \ k \in \mathbf{Z}\},$$
gdzie $\mathbf{Z}$ oznacza zbiór liczb całkowitych. Wtedy dla każdej wartości kąta $\alpha \in Argz$, (ϱ, φ) oraz (ϱ, α) reprezentują tę samą liczbę zespoloną (ten sam punkt na płaszczyźnie zespolonej),

4. pojęcia: modułu, argumentu głównego oraz zbioru argumentów pozwalają zapisać każdą liczbę zespoloną $z = a + b\mathbf{i}$, $z \neq 0$ w tzw. *postaci trygonometrycznej*, czyli
$$z = a + b\mathbf{i} = \varrho(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi) = \varrho(\cos\alpha + \mathbf{i}\sin\alpha), \text{ gdzie } \alpha \in Argz,$$
co jest prostą konsekwencją trygonometrii,

5. na odwrót, mając postać trygonometryczną liczby zespolonej, czytając powyższy wzór *z prawej na lewą*, otrzymamy jej postać algebraiczną,

6. dla postaci trygonometrycznej obowiązuje następująca *zasada porównywania liczb*: niech dane będą dwie liczby zespolone
$$z_1 = \varrho_1(\cos\alpha_1 + \mathbf{i}\sin\alpha_1), z_2 = \varrho_2(\cos\alpha_2 + \mathbf{i}\sin\alpha_2), \text{ gdzie } \alpha_1 \in Argz_1, \alpha_2 \in Argz_2.$$
Wtedy
$$z_1 = z_2 \ \Leftrightarrow \varrho_1 = \varrho_2 \text{ oraz } \alpha_1 - \alpha_2 = 2k\pi \text{ dla pewnej całkowitej wartości } k.$$

[1] Wykład planowany był na dzień 21.10.2015 r.

2 Własności postaci trygonometrycznej

Zaczniemy od prostego przykładu pokazującego różnicą pomiędzy pojęciami $arg z$ i $Arg z$

Przykład 1 *Znaleźć postać trygonometryczną liczby* $-\mathbf{i}$.

Ponieważ $|-\mathbf{i}| = 1$ oraz $arg(-\mathbf{i}) = \frac{3}{2}\pi$, możemy napisać

$$\mathbf{i} = 1\Big(\cos\frac{3}{2}\pi + \mathbf{i}\sin\frac{3}{2}\pi\Big).$$

Z drugiej strony, jednym z argumentów α liczby $-\mathbf{i}$ jest wartość $-\frac{\pi}{2} \in Arg(-\mathbf{i})$, dlatego

$$\mathbf{i} = 1\Big(\cos(-\frac{\pi}{2}) + \mathbf{i}\sin(-\frac{\pi}{2})\Big).$$

Zauważmy, że (zgodnie z zasadą porównywania) mamy

$$\varphi - \alpha = \frac{3}{2}\pi - (-\frac{\pi}{2}) = 2\pi.$$

Kolejny przykład pokazuje, że przy identyfikacji postaci trygonometrycznej należy mieć się na baczności!

Przykład 2 *Dane jest wyrażenie* $-\cos\beta + \mathbf{i}\sin\beta$, *gdzie* $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$. *Czy jest to postać trygonometryczna liczby zespolonej?*

Przyjmując $z = -\cos\beta + \mathbf{i}\sin\beta$, mamy $Re z = -\cos\beta$, $Im z = \sin\beta$, co oznacza, że na pewno mamy do czynienia z liczbą zespoloną daną w postaci algebraicznej. Jej postać trygonometryczna (istnieje, bowiem $z \neq 0$) musi wyglądać następująco

$$z = |z|\Big(\cos\alpha + \mathbf{i}\sin\alpha\Big), \text{ gdzie } \alpha \text{ jest jednym z argumentów } z.$$

Ponieważ z trygonometrii $|z| = 1$, oznacza to, że wartość α musi być taka, że

$$-\cos\beta + \mathbf{i}\sin\beta = \cos\alpha + \mathbf{i}\sin\alpha,$$

i z tego powodu wyrażenie to nie jest postacią trygonometryczną ($\beta \neq \frac{\pi}{2}$ nie jest argumentem). Aby ją wyznaczyć należy znaleźć wartość α. Jest to podstawowe zadanie z trygonometrii, co zostawiamy Czytelnikowi.

2.1 Zasada mnożenia

Wprowadzając pojęcie postaci trygonometrycznej wyraźnie zaakcentowaliśmy jedną kwestię – ma ona służyć uproszczeniu działania mnożenia, a więc potęgowania i dzielenia. Niech $z = z_1 z_2$, gdzie obie liczby z_1, z_2 są różne od zera. Wtedy $z \neq 0$ i dlatego możemy zapisać

$$z = |z|\Big(\cos\alpha + \mathbf{i}\sin\alpha\Big), \text{ gdzie } \alpha \in Arg z.$$

Z własności modułu wiemy, że $|z| = |z_1 z_2| = |z_1||z_2|$. Pozostaje nam wyznaczyć tylko wartość argumentu. Z zasad trygonometrii wynika (szczegóły rachunku pomijamy), że wtedy

$$arg z_1 + arg z_2 \in Arg z,$$

co pozwala nam napisać treść *zasady mnożenia*

Fakt 1 *(Zasada Mnożenia) Dla dowolnych różnych od zera liczb zespolonych z_1, z_2 mamy*

$$z_1 z_2 = |z_1|\Big(\cos\alpha_1 + \mathbf{i}\sin\alpha_1\Big)|z_2|\Big(\cos\alpha_2 + \mathbf{i}\sin\alpha_2\Big) = |z_1||z_2|\Big(\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + \mathbf{i}\sin(\alpha_1 + \alpha_2)\Big).$$

Uwaga 1 *W tym miejscu należy wyraźnie podkreślić, że z powyższej zasady nie wynika, że zawsze*

$$arg(z_1 z_2) = arg z_1 + arg z_2,$$

bowiem miara kąta po prawej stronie powyższej równości może być większa od 2π! Dlatego powyższa równość wymaga korekty (patrz zadanie na końcu dokumentu),

$$arg(z_1 z_2) = arg z_1 + arg z_2 + 2k\pi, \text{ dla pewnej całkowitej wartości } k.$$

Z *zasady mnożenia* łatwo wyprowadzić kolejną zasadę - *zasadę potęgowania*

Fakt 2 *(Zasada Potęgowania) Niech $w = z^n$ dla $n \geqslant 2$, $z \neq 0$. Wtedy $|w| = |z|^n$ oraz $n\alpha \in Arg w$ dla każdego $\alpha \in Arg z$, co oznacza, że*

$$\Big[|z|\Big(\cos\alpha + \mathbf{i}\sin\alpha\Big)\Big]^n = |z|^n\Big(\cos(n\alpha) + \mathbf{i}\sin(n\alpha)\Big).$$

Ostatni wzór w literaturze przedmiotu nosi miano *wzoru de Moivre'a.*

Przykład 3 *Obliczyć* $(1 + \mathbf{i})^{2015}$.

Oczywiście można by spróbować rachunku bezpośredniego - szczerze nie polecam tego! Tymczasem ze wzoru de Moivre'a wynika, że

$$(1+\mathbf{i})^{2015} = (\sqrt{2})^{2015}\Big(\cos 2015\frac{\pi}{4} + \mathbf{i}\sin 2015\frac{\pi}{4}\Big),$$

co po prostych przekształceniach (proszę to zrobić!) daje

$$(1+\mathbf{i})^{2015} = 2^{2013/2}(-1-\mathbf{i}).$$

Przykład 4 *Obliczyć* $w = (2\sqrt{3} - 2\mathbf{i})^{30}$.

Zauważmy, że $w = 2^{30}(\sqrt{3}-\mathbf{i})^{30}$. Oznaczmy przez $w_o = \sqrt{3}-\mathbf{i}$. Zamieniając w_o na postać trygonometryczną (uzasadnić to!) otrzymamy

$$w_o = 2\Big(\cos\frac{11}{6}\pi + \mathbf{i}\sin\frac{11}{6}\pi\Big),$$

dlatego ze wzoru de Moivre'a dostaniemy (proszę sprawdzić szczegóły rachunku!)

$$w = 2^{30}2^{30}\Big(\cos\frac{11}{6}30\pi + \mathbf{i}\sin\frac{11}{6}30\pi\Big) = 2^{60}\Big(\cos 2\pi + \mathbf{i}\sin 2\pi\Big) = 2^{60}.$$

2.2 Zasada sprzężenia, odwracania, dzielenia

Z interpretacji geometrycznej operacji sprzężenia liczby zespolonej z (różnej od zera) wynika, że $-arg z \in Arg\bar{z}$. Ponieważ dla modułu mamy $|\bar{z}| = |z|$, możemy napisać

Fakt 3 *(Zasada Sprzężenia)*

$$\bar{z} = |z|\Big(\cos(-\varphi) + \mathbf{i}\sin(-\varphi)\Big), \ \textit{gdzie}\ \varphi = arg z.$$

Zajmiemy się teraz przypadkiem liczby odwrotnej. Z zasady dzielenia wiemy, że

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}, \text{ o ile } z \neq 0,$$

skąd wynika, że (dlaczego?) $|z^{-1}| = \frac{1}{|z|}$. Ponadto z powyższego wzoru $-arg z \in Arg(z^{-1})$. Łącząc ostanie dwie uwagi otrzymamy

Fakt 4 *(Zasada Odwracania)*

$$z^{-1} = |z|^{-1}\Big(\cos(-\varphi) + \mathbf{i}\sin(-\varphi)\Big), \ \textit{gdzie}\ \varphi = arg z.$$

Ostatni Fakt zilustrujemy przykładem

Przykład 5 *Obliczyć liczbę odwrotną do* $z = 1 + \mathbf{i}$.

Metodę bezpośrednią – wykorzystanie postaci algebraicznej zostawiamy Czytelnikowi. My posłużymy się *zasadą odwracania*. Ponieważ $|z| = \sqrt{2}$ oraz $argz = \frac{\pi}{4}$, z ostatniego wzoru otrzymamy (uzasadnić szczegóły!)

$$(1+\mathbf{i})^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\Big(\cos\big(\frac{\pi}{4}\big) - \mathbf{i}\sin\big(\frac{\pi}{4}\big)\Big) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathbf{i}.$$

Zauważmy, że $(1+\mathbf{i})(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathbf{i}) = 1$, co potwierdza poprawność otrzymanego wyniku.

Niech wreszcie dane będą liczby z_1, z_2, gdzie $z_2 \neq 0$. Jak wiem, wtedy $z_1 : z_2 = z_1 z_2^{-1}$. Dlatego z *zasady mnożenia* i *zasady odwracania* oraz uwagi, że $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ otrzymamy kolejną zasadę:

Fakt 5 *(Zasada Dzielenia) Dla dowolnych liczb zespolonych* z_1, z_2, $z_2 \neq 0$ *mamy*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\Big(\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + \mathbf{i}\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\Big).$$

Przykład 6 *Obliczyć* $z = \frac{1+\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}}$.

Ponieważ

$$|z| = 1, \ \frac{\pi}{4} = arg(1+\mathbf{i}), \ -\frac{\pi}{4} \in Arg(1-\mathbf{i}),$$

z *zasady dzielenia* dostaniemy $z = \cos\frac{\pi}{2} + \mathbf{i}\sin\frac{\pi}{2} = \mathbf{i}$, co łatwo potwierdzić (jak?).

3 Inne przykłady

Pokażemy teraz przykłady, które jeszcze raz podkreślą zalety postaci trygonometrycznej.

Przykład 7 *Rozwiązać równanie* $argz = \frac{5}{4}\pi$.

Jeśli przez A oznaczymy zbiór rozwiązań powyższego równania, to zauważmy (z interpretacji argumentu głównego), że warunek $z \in A$ oznacza dokładnie, że:

1. moduł takiej liczby jest dowolną liczbą dodatnią (dlaczego?)
2. każda taka liczba leży na półprostej nachylonej do osi rzeczywistej pod kątem $\frac{5}{4}\pi$.

Dlatego wspomniana półprosta bez początku jest rozwiązaniem naszego równania.

Przykład 8 *Narysować zbiór* $A = \{z \in \mathbf{C}\colon \ \pi \leqslant arg(\mathbf{i}z)\}$.

Przede wszystkim zauważmy, że z definicji argumentu głównego wynika, że

$$z \in A \Leftrightarrow \pi \leqslant arg(\mathbf{i}z) < 2\pi.$$

Zastosujemy teraz Uwagę 1: $arg(\mathbf{i}z) = arg\mathbf{i}+argz+2k\pi$ dla pewnych całkowitych wartości k. Jak znaleźć te wartości? Wstawmy otrzymaną równość do wniosku uzyskanego z Uwagi 1, czyli napiszmy

$$\pi \leqslant \frac{\pi}{2} + \varphi + 2k\pi < 2\pi,$$

gdzie jak zwykle $\varphi = argz$. Po elementarnych przekształceniach otrzymamy

$$\frac{\pi}{2} - 2k\pi \leqslant \varphi < \frac{3}{2}\pi - 2k\pi.$$

To jest ten szukany warunek, który pozwoli wyznaczyć nam te „pewne" wartości, bowiem należy je dobrać tak, aby $\varphi \in [0, 2\pi)$. Zauważmy, że w tym przypadku tylko $k = 0$. Czytelnikowi zostawiamy zadanie ilustracji graficznej otrzymanego rozwiązania.

Kolej na przykład typowo algebraiczny

Przykład 9 *Rozwiązać równanie* $\bar{z}^4 = z^2|z^2|$. *Wynik przedstawić graficznie.*

Zbiór rozwiązań równania oznaczymy przez A. Ponieważ wykorzystamy postać trygonometryczną, indywidualnie musimy sprawdzić, czy zdanie $0 \in A$ jest prawdziwe. Wprost z postaci równania otrzymujemy odpowiedź twierdzącą. Dlatego dalej założymy, że $z \neq 0$. Oznacza to, że $z = \varrho(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi)$, gdzie kolejno $\varrho = |z|, \varphi = argz \in [0, 2\pi)$. Jak zobaczymy ostatni warunek jest bardzo istotny! Jesteśmy gotowi, aby oryginalne równanie zapisać w postaci trygonometrycznej - po podstawieniu ostatniej równości do równania dostaniemy (będziemy korzystali z kilku zasad, jakich?)

$$\varrho^4\Big(\cos(-4\varphi) + \mathbf{i}\sin(-4\varphi)\Big) = \varrho^4\Big(\cos(2\varphi) + \mathbf{i}\sin(2\varphi)\Big).$$

Skorzystamy teraz z *zasady porównywania*, skąd otrzymamy następujący układ:

$$\varrho^4 = \varrho^4 \text{ i } -4\varphi = 2\varphi + 2k\pi, \text{ dla pewnych } k \in \mathbf{Z}.$$

Oczywiście układ ten jest równoważny

$$\varrho > 0 \text{ i } 6\varphi = -2k\pi, \text{ dla pewnych } k \in \mathbf{Z}.$$

Bezpośrednim rachunkiem wynika stąd, że (proszę to zrobić!)

$$\varrho > 0 \text{ i } \varphi = -\frac{1}{3}k\pi, \text{ dla } k = 0, -1, -2, -3, -4, -5.$$

Sporządzenie odpowiedniego rysunku zostawiam Czytelnikowi.

4 Zadania

Zadanie 1 *Zapisać w postaci trygonometrycznej liczby:* $1+\mathbf{i}\,\mathrm{tg}\,\alpha$, $\sin\alpha+\mathbf{i}\cos\alpha$, *gdzie* $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Zadanie 2 *Doprecyzować następujące formuły:*

$$arg(z_1 z_2) = \ldots$$

$$arg(\frac{z_1}{z_2}) = \ldots$$

$$arg(-z) = \ldots$$

$$arg(\bar{z}) = \ldots$$

Zadanie 3 *Obliczyć* $\frac{(1+\mathbf{i})^{22}}{(1-\mathbf{i}\sqrt{3})^6}$.

Zadanie 4 *Narysować rozwiązanie równania* $arg(z^6) = \pi$.

Zadanie 5 *Rozwiązać równania:* $z^5 = 1$, $(\bar{z})^2 z^2 = \frac{4}{z^2}$.