

3.14–czyli imieniny liczby π

Ryszard Rębowski
Wydział Zarządzania i Informatyki
PWSZ im. Witelona w Legnicy

14 marca 2011

Któż z nas nie słyszał o π , nawet jeśli nie zdaje sobie sprawy z tego, że litera π pochodzi z alfabetu greckiego. Bowiem nie o znajomość greki tutaj chodzi, a jak większość z nas myśli, i słusznie, chodzi o koło, czyli o geometrię. Każdy z nas pewnie kiedyś na lekcji matematyki badał zależność obwodu tego koła od jego średnicy i w wyniku kilku pomiarów stwierdził zadziwiającą zależność:

$$\frac{L}{d} = \text{const.},$$

gdzie L oznacza obwód koła, d jego średnicę.

Właśnie to spostrzeżenie rzuca się od razu w oczy, aczkolwiek wcale nie jest jasne dlaczego tak jest! Jeśli już to zauważyliśmy, to rzeczą naturalną jest zapytać o wartość tej stałej. Tym razem jest jeszcze gorzej aniżeli zdajemy sobie z tego sprawę. Nie wtajemniczeni chóralnie odpowiadają 3, 14, ale tym razem populizm nie zwycięża, bowiem odpowiedź jest niepoprawna!

Co do jednego wątpliwości nie powinniśmy mieć–ta stała, o której mowa jest wyżej jest liczbą. W takim razie pytanie powinno brzmieć: *jaką liczbą?*

Zostawmy na chwilę ostatnią kwestię i zajmijmy się samą regułą proporcji, o której mowa wyżej. Spróbujmy ją uzasadnić.

W tym celu weźmy koło o promieniu R . Niech L oznacza jego obwód. Wybierzmy z tego koła jego wycinek o kącie środkowym $\alpha \in (0^\circ, 360^\circ)$. Wtedy z zasady proporcji długość $\tilde{L}$ tego wycinka jest równa

$$\tilde{L} = L \frac{\alpha}{360}.$$

Założmy, że $\alpha = \alpha_o$ jest takie, że $\tilde{L} = R$. Wtedy powyższa proporcja będzie miała postać

$$\frac{L}{R} \cdot \alpha_o = 360^\circ,$$

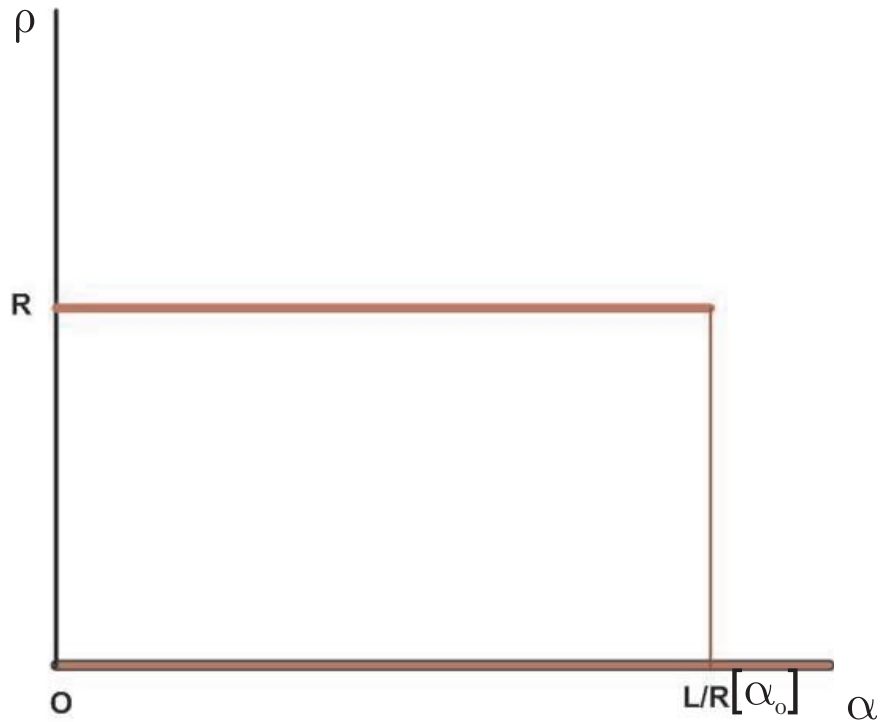
co oznacza, że kąt pełny jest równy $\frac{L}{R}$ jednostek, gdzie jednostką tą jest miara kąta α_o .

Spójrzmy teraz na rozważane koło z punktu widzenia jego środka i półprostej wyprowadzonej z tego środka. Wtedy położenie każdego punktu należącego do tego koła możemy opisać parą dwóch liczb:

ρ –odległością tego punktu od środka koła,

φ –miarą kąta skierowanego w kierunku przeciwnym do wskazówek zegara, gdzie $\varphi \in [0^\circ, 360^\circ)$.

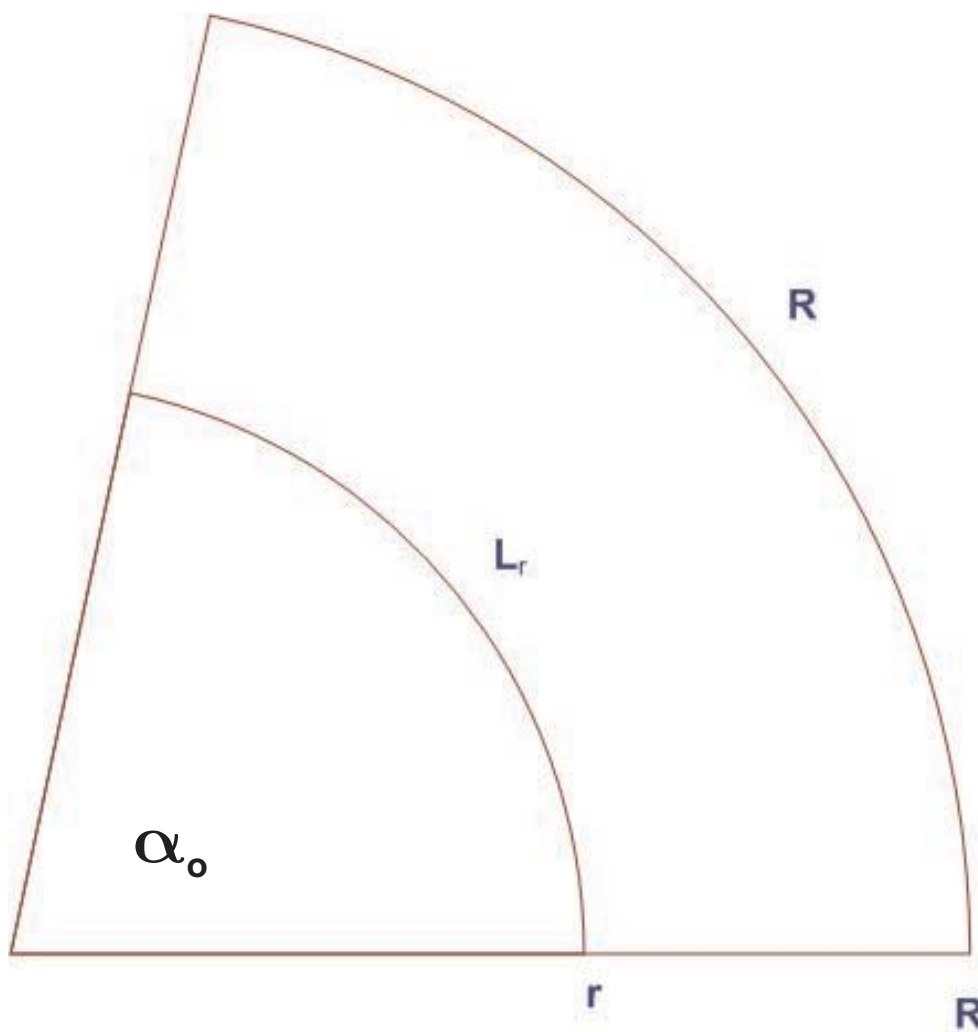
Weźmy teraz układ współrzędnych kartezjańskich, gdzie na osi poziomej będziemy odmierzać wartości kąta φ w jednostkach α_o , zaś na osi pionowej wartości ρ . Wtedy wszystkie punkty z koła o promieniu R można opisać za pomocą punktów znajdujących się w prostokącie umiejscowionym w zdefiniowanym wyżej układzie, którego podstawą jest odcinek $[0, \frac{L}{R})$ leżący na osi $O\varphi$, natomiast (lewym) bokiem odcinek $[0, R]$ leżący na osi $O\rho$ (patrz rysunek 1).



Rysunek 1: obraz w układzie $O\varphi\rho$ koła

Zauważmy, że wtedy pole tego prostokąta równe jest długości okręgu naszego koła. Weźmy teraz wycinki naszego koła o parametrach: $\alpha_o, r < R$, jak to pokazano na rysunku 2, gdzie przez L_r oznaczyliśmy długość łuku wycinka o promieniu r .

Wtedy wycinki w układzie $O\varphi\rho$ będą prostokątami jak na rysunku 3.



Rysunek 2: wycinek kołowy o parametrach α_o, r, R

W takim razie z zasady proporcji, w jednostkach α_o , L_r ma długość

$$L_r = r \cdot 1 [\alpha_o] = r,$$

dla każdego $0 < r \leq R$.

W szczególności, podstawiając $r = R$ i z uwagi, że $L_R = R$ (patrz rysunek 2), w standardowych jednostkach dostaniemy

$$R = L \frac{\alpha_o}{360}.$$

Pokazaliśmy zatem, że

dla każdego koła o promieniu R i długości okręgu L zachodzi równość

$$L = \frac{360}{\alpha_o} R.$$

W szczególności

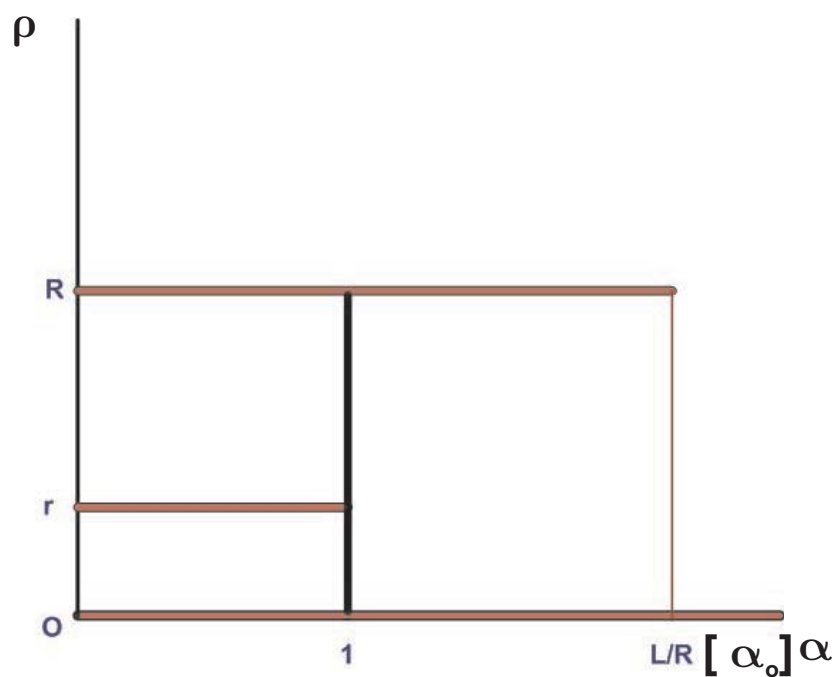
$$\frac{L}{d} = \frac{180}{\alpha_o}, \quad d = 2R.$$

Oznaczając teraz przez π wartość liczby

$$\frac{180}{\alpha_o},$$

możemy zapisać

$$L = 2\pi R.$$



Rysunek 3: obrazy wycinków kołowych w układzie $O\varphi\rho$

Uwagi

1. Dobrze wiadomo, że miara kąta α_o w przybliżeniu ma wartość

$$57,29577951^\circ$$

i jednostkę $1[\alpha_o]$ nazywa się *radianem*.

2. Wtedy wartość przybliżona liczby π jest równa

$$\pi \cong 3,14159265376.$$

3. Wykazane wyżej zależności pozwalają konwertować jednostkę $[\circ]$ na $[rad]$ i na odwrót. Jeśli dla kąta płaskiego α , przez α° oznaczmy jego miarę w stopniach, a przez $\alpha(rad)$ w radianach, to

$$\alpha(rad) = \frac{\alpha^\circ}{180^\circ} \pi [rad].$$

Jak pokazał w 1882 roku F.Lindemann, liczba π nie jest pierwiastkiem żadnego równania algebraicznego, a więc postaci $W(x) = 0$, gdzie W oznacza dowolny wielomian rzeczywisty o współczynnikach całkowitych. Jako taka nie może być liczbą wymierną. Pozwoliło to wraz z twierdzeniem Wantzela–Gaussa rozstrzygnąć słynny problem szkoły pitagorejskiej–problem kwadratury koła. Pitagorejczycy pytali się czy za pomocą linijki i cyrkla można skonstruować kwadrat, którego pole będzie równe polu danego koła?. Z twierdzenia Wantzela–Gaussa wynika, że jeśli kwadratura koła miałaby rozwiązanie, to liczba π musiałaby być algebraiczna, a tak nie jest, co wykazał Lindemann.

4. Liczba π jako liczba niewymierna nie pozwala się zapisać w układzie dziesiętnym, stąd potrzeba posługiwania się jej przybliżeniem. Z drugiej strony istnieją sposoby jej wyreprezentowania. Jedną z takich metod jest teoria szeregów funkcyjnych. Studenci Informatyki wiedzą, że funkcję $arctgx$ można rozwinąć w taki szereg (na mojej stronie można na ten temat znaleźć odpowiedni tekst), czyli

$$arctgx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \text{ dla } x \in (0, 1].$$

W szczególności, po podstawieniu $x = 1$ dostaniemy

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}.$$

Co za regularność! Przecież ciąg $\left((-1)^n \frac{1}{2n+1}\right)_{n \geq 0}$ jest naprzemiennym ciągiem odwrotności kolejnych liczb nieparzystych!

5. Na liczbę π , jak pokazał w 1748 roku L. Euler należy spojrzeć szerzej–z perspektywy liczb zespolonych. Ze słynnego wzoru Eulera wynika, że

$$e^{\pi i} + 1 = 0.$$

Fenomen tego wzoru polega na tym, że obok siebie znalazło się pięć z sześciu najważniejszych liczb (zabrakło miejsca na słynną liczbę e związaną z ciągiem Fibonacciego i ze złotą proporcją).

6. Liczba π doczekała się również swojej interpretacji *statystycznej*. W roku 1773 Georges–Louis Leclerc hrabia Buffon sformułował swój słynny problem. Pytał w nim *jakie jest prawdopodobieństwo, że igła o długości l rzucona na płaszczyznę, na której naniesione są równoległe i oddalone od siebie o l proste, przetnie taką prostą*. Metodami *probabilistycznego modelu geometrycznego* można pokazać, że prawdopodobieństwo to jest równe $\frac{2}{\pi}$. Z kolei metodami statystyki matematycznej pozwala to uzyskiwać bardzo dokładne przybliżenie wartości liczby π , bowiem z *mocnego prawa wielkich liczb* wynika, że

$$\pi \cong \frac{2n}{k_n} \text{ z prawdopodobieństwem } 1,$$

gdzie n oznacza liczbę powtórzeń rzutów igłą, k_n liczbę przecięć.

Artykuł ten dedykuję swoim byłym i obecnym studentom PWSZ w Legnicy. Zajęcia jakie odbywaliśmy w ramach kursów z: matematyki, matematyki dyskretniej i metod probabilistycznych powinny przybliżyć Państwu poruszoną w tym artykule tematykę. Rozmawialiśmy bowiem o: liczbach zespolonych i ich postaci wykładniczej, równaniach algebraicznych, prawdopodobieństwie geometrycznym, prawach wielkich liczb, ciągach rekurencyjnych Fibonacciego i o statystyce matematycznej.