

Liczbę π często nazywa się *stałą Archimedesesa*, aczkolwiek jej pochodzenie jest o wiele starsze¹. Na pewno posługiwał się nią twórca *geometrii euklidesowej*–Euklides (365–300 B.C.). Niewątpliwie Archimedes (287–212 BC) był jednym z pierwszych, który zaczął badać liczbę π naukowo. Stosując metody geometrii udało mu się oszacować jej wartość z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku. Nie ma natomiast żadnego dowodu na to, że oznaczał i nazywał tę liczbę tak jak współcześni, czyli π -*ludolfina*. Symbol π wprowadzono do literatury przedmiotu dopiero w 1706 r. Uznaje się, że zawdzięczamy to Williamowi Jonesowi (1675–1749), który zaproponował używania greckiej litery π dla oznaczenia stałej Archimedesesa. Zrobił to w swoim dziele *Synopsis Palmariorum Mathesos*. Dla podkreślenia geometrycznego pochodzenia tej liczby, czyli obwodu, użył pierwszej litery słowa *perimetron* (z greckiego περιμετρον). Spotkało się to ze zrozumieniem ówczesnego świata nauki, a kropkę nad "i" postawił Euler wyrażając swoją aprobatę. Z kolei termin *ludolfina* odnosi się do matematyka niemieckiego Ludolpha van Ceulena (1540–1610), który jako jeden z pierwszych nowożytnych uczonych zajmował się obliczeniem wartości liczby π . Dopiero w 1761 r., Johan Heinrich Lambert (1728–1777), matematyk szwajcarski francuskiego pochodzenia, udowodnił, że liczby tej nie można przedstawić w postaci ilorazu dwóch liczb całkowitych. Tym samym pokazał, że jest liczbą niewymierną. Stało się więc jasne, dlaczego ani Archimedesowi, ani Ceulenowi i innym nie udało się ustalić jej wartości. Co więcej, okazało się, co pokazał w 1882 r. Ferdinand Lindemann (1852–1939), że jest ona *liczbą przestępną*, czyli nie może być pierwiastkiem *równania algebraicznego* o współczynnikach całkowitych². Ma to swoje konsekwencje w postaci nawet nie możliwości zapisania π za pomocą skończonego zapisu złożonego z liczb całkowitych, działań arytmetycznych, ułamków oraz potęg i pierwiastków. Z geometrycznego punktu widzenia odkrycie to ostatecznie rozstrzyga, że niemożliwa jest klasyczna konstrukcja (przy pomocy linijki i cyrkla) kwadratu o powierzchni równej powierzchni danego koła. Problem ten nazywany jest w literaturze przedmiotu *kwadraturą koła*.

Wszystkie fakty historyczne zaczerpnęliśmy z cytowanej literatury. Na szczególną uwagę zasługują wydawnictwa: [2], [3], [4], [5], [10], [16] i [18]. Czytelnika zachęcamy również do lektury [1], [8] oraz do skorzystania z zasobów źródła internetowego [9]. Przedstawione w rozdziale 2 zdjęcia uczonych pobrano z repozytorium wolnych zasobów *Wikimedia Commons*.

¹Znane są dowody świadczące o korzystaniu z własności liczby π już w starożytnym Babilonie. Odkryto, że na jednej z kamiennych tablic, datowanej na lata 1900-1680 BC pojawia się opis wartości obwodu koła o średnicy 1, przybliżony przez wartość 3,125.

²Równania, które powstają z przyrównania wielomianu do zera.

1 Liczba π w teorii funkcji rzeczywistych

π jest liczbą niewymierną, o czym wiadomo co najmniej od 1761 r. To właśnie dlatego trudno jest posługiwać się π w obliczeniach numerycznych czy w technice. Wymaga to bowiem używania jej wartości przybliżonej, np. 3,14159 ale również czasami rozwinięciem postaci

$\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ 41971\ 69399\ 37510\ 58209$
74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679 82148 08651 32823 06647
09384 46095 50582 23172 53594 08128 48111 74502 84102 70193 85211 05559...

a w konsekwencji kontroli dokładności takiego rachunku. Dla matematyki taka aproksymacja jest niedostateczna, co stało się wyzwaniem dla wielu pokoleń matematyków. Dociekliwego Czytelnika odsyłamy w tym miejscu do lektury bardzo znanej w literaturze przedmiotu książki E. Couranta i H. Robbinsa "Co to jest MATEMATYKA" ([4]) oraz do [9].

Skoro liczby π nie można zapisać w *notacji pozycyjnej*³ zaczęto poszukiwać metod i technik rachunkowych pozwalających tę trudność obejść. Stało się to za sprawą wielu matematyków, wśród nich na uwagę na pewno zasługują: P. Fermat (1601–1665), I. Newton (1643–1727), G.W. Leibnitz (1646–1716), B. Taylor (1685–1731), L. Euler (1707–1783), J.B.J. Fourier (1768–1830), C.F. Gauss (1777–1855), A. Cauchy (1789–1857), B. Riemann (1826–1866), J. Hadamard (1865–1963), S. Ramadujan (1887–1920) i inni. Przełomem stało się zdefiniowanie pojęcia *zbieżności* ciągu liczbowego oraz jego uogólnienie na przypadek funkcji rzeczywistych. Pozwoliło to spośród wszystkich funkcji rzeczywistych wybrać te "dobre", czyli *funkcje ciągłe*. Stąd był już mały krok, chociaż w historii matematyki okazał się on krokiem milowym, w kierunku *funkcji gładkich*, czyli *różniczkowalnych*. Mariaż teorii szeregów z uzyskanymi wynikami rachunku różniczkowego oraz teorii całki zaowocował zaistnieniem potężnego narzędzia – *teorii szeregów funkcyjnych*, w tym *szeregów potęgowych* i *szeregów Fouriera*. O możliwościach tej teorii w badaniu zagadnień teorio-liczbowych napiszemy dalej.

1.1 Rozwinięcie funkcji $arctg$ i wzór Leibniza na π

Weźmy funkcję

$$\mathbf{R} \ni x \longrightarrow arctg(x) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right).$$

³Wcale to nie oznacza, że zaprzestano zajmować się tym problemem. Dość sugestywnie przedstawiono to np. w filmie zatytułowanym " π " Darrena Aronofskiego z 1998 r. Ponadto dalej trwają poszukiwania dokładniejszych rozwinięć π (patrz np. [9]).

Przypomnijmy, że funkcja ta powstaje w wyniku wzięcia funkcji odwrotnej do pierwszej gałęzi funkcji trygonometrycznej *tangens*. Oznacza to, że jej wykres wygląda tak jak na rysunku 1. Z podstaw rachunku różniczkowego wiadomo, że

$$\left(\operatorname{arctg}(x)\right)' = \frac{1}{1+x^2}, \text{ dla wszystkich rzeczywistych } x.$$

Wynik tego różniczkowania należy skojarzyć z *postępem geometrycznym*, dokładniej z jego skończoną sumą. Z matematyki elementarnej wiadomo, że dla postępu

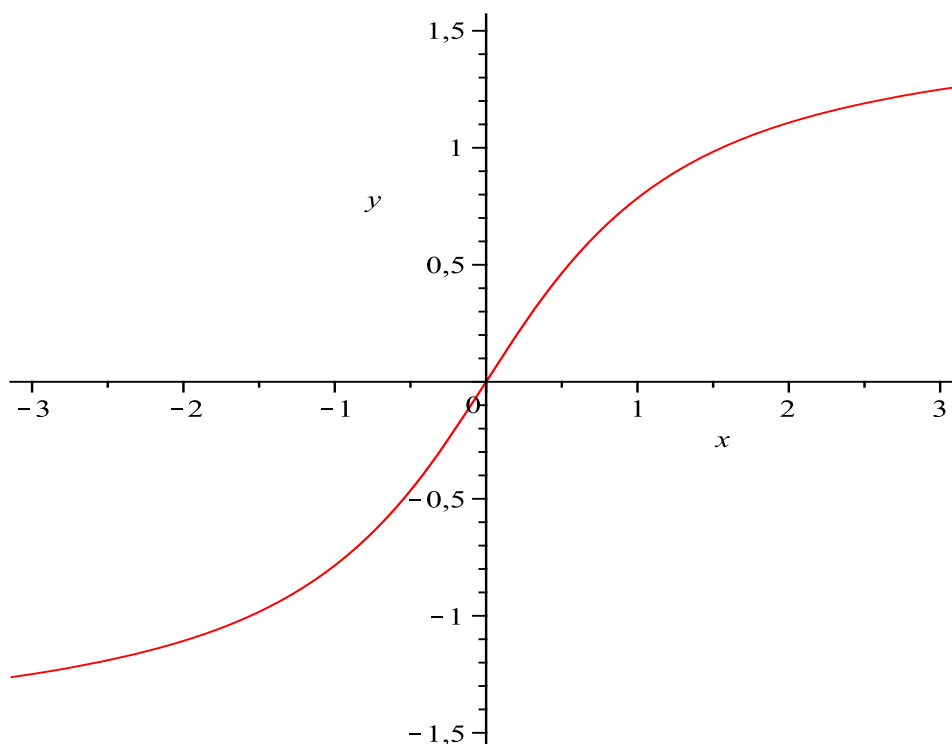
$$1, q, q^2, \dots, q^{n-1},$$

dla $q \neq 1$, S_n -suma jego wyrazów ma postać

$$S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q},$$

co po prostym przekształceniu daje

$$\frac{1}{1 - q} = 1 + q + \dots + q^{n-1} + \frac{q^n}{1 - q}.$$



Rysunek 1: wykres funkcji *arctg*

Stosując powszechnie używaną konwencję sumowania, ostatni wzór zapiszemy następująco

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{j=0}^{n-1} q^j + \frac{q^n}{1-q}.$$

Jeśli teraz dokonamy podstawienia $q = -x^2$, to otrzymamy pochodną funkcji \arctg (q zawsze jest różne od jedności dla każdego x), czyli

$$\left(\arctg(x)\right)' = \sum_{j=0}^{n-1} (-x^2)^j + \frac{(-x^2)^n}{1+x^2}$$

lub równoważnie

$$\left(\arctg(x)\right)' = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j x^{2j} + \frac{(-1)^n x^{2n}}{1+x^2} \text{ dla } x \in \mathbf{R}.$$

Scałkujmy tę równość obustronnie po przedziale jednostkowym $[0, 1]$. Z podstawowego twierdzenia rachunku całkowego *Riemanna-Newtona-Leibniza*, *liniowości całki* i faktu, że $\int_0^1 \frac{1}{x^k} dx = \frac{1}{k+1}$ dla wszystkich naturalnych k , dostaniemy

$$\arctg 1 - \arctg 0 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx.$$

Ponieważ $\arctg 1 = \frac{\pi}{4}$, $\arctg 0 = 0$, więc ostatnia równość, po zastosowaniu konwencji sumacyjnej, oznacza, że

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{2j-1} + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx.$$

Daje to nam przybliżenie liczby $\frac{\pi}{4}$ sumą $\sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{2j-1}$ z dokładnością ϵ_n , gdzie

$$\epsilon_n = \left| (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx \right| = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx.$$

Pozostaje zbadać zbieżność ciągu (ϵ_n) . Z definicji $\epsilon_n \geq 0$ dla każdego n . Z drugiej strony, jeśli spojrzymy na funkcję

$$f(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^2}, \quad x \in [0, 1],$$

to ponieważ $1+x^2 > 0$ oraz $x^{2n} \geq 0$,

$$f(x) \leq x^{2n}, \quad x \in [0, 1].$$

Z interpretacji geometrycznej całki wynika, że $\int_0^1 f(x)dx \leq \int_0^1 x^{2n}dx$ i dlatego

$$\epsilon_n \leq \int_0^1 x^{2n}dx = \frac{1}{2n+1}.$$

Ponieważ wyrazy ciągu (ϵ_n) są nieujemne, więc powyższa nierówność pozwala wykorzystać znane kryterium zbieżności ciągu – *twierdzenie o trzech ciągach*. Oznacza to, że $\epsilon_n \rightarrow 0$. W takim razie z twierdzenia o granicy sumy dwóch ciągów dostaniemy

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{2j-1}.$$

Wykorzystując pojęcie szeregu liczbowego i jego sumy, ostatnią równość możemy zapisać następująco

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{2j-1},$$

co oznacza, że liczba π jest równa czterokrotnej sumie *naprzemiennego* szeregu odwrotności kolejnych liczb nieparzystych. W literaturze powyższa równość znana jest jako *wzór Leibniza*. Było to pierwsze takie przedstawienie liczby π .

1.2 Szeregi harmoniczne a liczba π

Wśród szeregów liczbowych o wyrazach dodatnich ważną rolę odgrywają tzw. *szeregi α -harmoniczne*, czyli

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \text{ gdzie } \alpha > 0.$$

Dobrze wiadomo, że dla $\alpha \in (0, 1)$ szeregi te są *rozbieżne*, natomiast dla $\alpha > 1$ już są *zbieżne*. Pozwala to, jak zauważył Riemann zdefiniować funkcję, nazywaną funkcją ζ *Riemanna*⁴, czyli

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \alpha > 1.$$

Przykładem rozbieżnego szeregu α -harmonicznego jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, nazywany *szeregiem harmonicznym*. Zjawiska opisane szeregiem harmonicznym znane były w jakimś sensie już starożytnym. Pojawiały się jako *paradoks Zenona z Elei* (490 rok BC). Zanim zajmiemy się związkiem pomiędzy szeregami α -harmonicznymi a liczbą π , podamy przykład jednej z wersji takiego paradoksu.

Mówi on o Archimedesie, który ściga podążającego przed nim zółwia. Sprezujemy warunki w jakich odbywa się ta rywalizacja.

⁴Z funkcją tą, a tak naprawdę z jej zespolonym rozszerzeniem związana jest słynna, bowiem nie rozstrzygnięta do tej pory *hipoteza Riemanna*. Jej znaczenie jest ważne w teorii liczb pierwszych.

1. Archimedes jak i żółw poruszają się ruchem jednostajnym prostoliniowym.
2. W chwili zero Archimedes znajduje się w punkcie A odległym od punktu Z , w którym znajduje się żółw.
3. Odległość punktu A od Z wynosi d_o .
4. Jeśli v_A i v_Z oznaczają odpowiednio prędkość Archimedesesa i żółwia, to $v_A = \beta v_Z$ dla $\beta > 1$ (przecież Archmedes nie poruszał się w żółwym tempie).

Zajmijmy się najpierw analizą logiczną zjawiska tego pościgu. W chwili zero obaj ruszają przed siebie, ruchem jednostajnym prostoliniowym.⁵ Po pewnej chwili, powiedzmy t_1 Archimedes dotrze do punktu Z . W tym czasie żółw przebędzie drogę, która zaprowadzi go do punktu Z_1 , różnego od Z . W kolejnym kroku analizy, Archimedes po kolejnej chwili t_2 dotrze do punktu Z_1 , z kolei żółw oddali się do nowego punktu Z_2 , itd. Ponieważ nie ma powodu aby twierdzić, że iteracje tego zjawiska kiedyś zakończą się, przecież oboje, Archimedes jak i żółw poruszają się zgodnie ze sformułowanymi zasadami, nie ma podstaw twierdzić, że Archimedes kiedykolwiek dogoni żółwia. Z drugiej strony, chociażby z autopsji wiemy, że taki pościg zakończy się zawsze sukcesem i jest to tylko kwestią czasu. W takim razie przedstawione wyżej rozumowanie wyklucza istnienie ruchu! O co tutaj chodzi?

Aby definitywnie rozstrzygnąć kwestię przedstawionego pościgu przeprowadzimy jego analizę numeryczną, czyli ilościową. W tym celu wprowadźmy następujące oznaczenia:

- d_n dla $n = 0, 1, 2, \dots$ niech oznacza długości odcinków AZ, ZZ_1, Z_1Z_2, \dots ;
- t_n dla $n = 0, 1, 2, \dots$ czas jaki potrzebuje Archimedes i żółw na przebycie kolejnych odcinków.

Z założenia $v_A = \beta v_Z$ i $d_o = v_A t_o$ oraz $d_1 = v_Z t_o$, bowiem odcinki AZ i ZZ_1 oboje pokonują w czasie t_o . Ponieważ wtedy $t_o = \frac{d_o}{v_A}$, więc

$$d_1 = v_Z \frac{d_o}{v_A} = \frac{v_A}{\beta} \frac{d_o}{v_A} = \frac{d_o}{\beta}.$$

Podobnie, ponieważ $d_1 = v_A t_1$ i $v_A t_1 = v_Z t_o$ (Archimedes i żółw przebywają odcinek ZZ_1), więc $t_1 = \frac{v_Z}{v_A} t_o$ i dlatego

$$d_2 = v_Z t_1 = v_Z \frac{v_Z}{v_A} t_o = \left(\frac{v_A}{\beta}\right)^2 \frac{1}{v_A} \frac{d_o}{v_A} = \frac{d_o}{\beta^2}.$$

⁵Umówmy się, że dla uproszczenia pomijamy wstępną fazę ruchu, kiedy to występują przyspieszenia.

I ogólnie, powtarzając powyższe rozumowanie otrzymamy, że $d_n = \frac{d_o}{\beta^n}$ dla wszystkich naturalnych n . Dostaliśmy więc szereg liczbowy o wyrazie ogólnym d_n , który jest zbieżny. Jeśli przez S oznaczymy jego sumę, to

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} d_n = d_o \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta^n} = d_o \frac{1}{\beta - 1}.$$

Wtedy S jest całkowitą drogą przebytą przez żółwia w tej wędrówce. W tym samym czasie Archimedes pokona drogę równą

$$S + d_o = d_o \frac{1}{\beta - 1} + d_o = d_o \frac{\beta}{\beta - 1},$$

na końcu której dogoni żółwia! Zatem nie jest tak jak tłumaczy to logika, która w swoim rozumowaniu nie uwzględnia efektu zbieżności, a tylko nieskończone pojawianie się wartości dodatnich. Ruch w takim razie jednak istnieje!

Wracamy do naszego głównego problemu tego rozdziału—związku pomiędzy liczbą π a szeregami α -harmonicznymi. Weźmy jeszcze raz wzór na pochodną funkcji \arctg otrzymany w podrozdziale 1.1

$$\left(\arctg(x)\right)' = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j x^{2j} + \frac{(-1)^n x^{2n}}{1+x^2} \text{ dla } x \in \mathbf{R}.$$

Ustalmy $t \in (0, 1]$ i scałkujmy tę równość obustronnie po przedziale $[0, t]$

$$\int_0^t \left(\arctg(x)\right)' dx = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \int_0^t x^{2j} dx + (-1)^n \int_0^t \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx.$$

Licząc każdą z całek otrzymamy

$$\arctg(t) = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \frac{t^{2j}}{2j+1} + (-1)^n \int_0^t \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx.$$

Szykujemy się do wykonania przejścia granicznego przy $n \rightarrow \infty$. W tym celu skorzystamy z oszacowania, które w podobnej wersji pojawiło się w podrozdziale 1.1

$$\left| \arctg(t) - \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \frac{t^{2j}}{2j+1} \right| = \int_0^t \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx \leq \int_0^t x^{2n} dx = \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \leq \frac{1}{2n+1},$$

co pokazuje, że dla $x \in [0, 1]$

$$\arctg(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Jest to tzw. *rozwinięcie w szereg potęgowy*, zwany też szeregiem Taylora–Maclaurina, funkcji \arctg .

Euler zauważył, że szereg ten (jak i wiele mu podobnych) można poddać pewnemu przekształceniu⁶ w wyniku czego dostaniemy

$$\arctg(x) = \frac{x}{1+x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^n,$$

gdzie symbolem $(2n)!!$ (odpowiednio $(2n+1)!!$) oznaczyliśmy iloczyn kolejnych liczb parzystych (nieparzystych) od 2 do $2n$ (od 1 do $2n+1$). Na przykład $7!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$, $6!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$.

Powyższą równość przekształcamy dalej. Zaczniemy od zamiany zmiennych podstawiając $x = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ dla $t \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$. Niech liczba $s \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ będzie takie, że

$$\arctg \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} = s.$$

Wtedy, z definicji funkcji \arctg i tg oraz uwagi, że $\cos(s) > 0$ dla wybranego s , dostaniemy kolejno

$$\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} = tg(s) = \frac{\sin(s)}{\cos(s)} = \frac{\sin(s)}{\sqrt{\cos^2(s)}} = \frac{\sin(s)}{\sqrt{1-\sin^2(s)}}.$$

Rozwiązując tę proporcję otrzymamy $t^2 = \sin^2(s)$, skąd $t = \sin(s)$, bowiem t oraz $\sin(s)$ jest nieujemne. Oznacza to, że $s = \arcsin(t)$ i dlatego

$$\arctg \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin(t).$$

Aby dokonać zamiany zmiennych we wzorze na \arctg musimy jeszcze wyrazić $\frac{x}{1+x^2}$ oraz $\frac{x^2}{1+x^2}$ za pomocą t . Wygląda to następująco

$$\frac{x}{1+x^2} = \frac{\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}}{1 + \frac{t^2}{1-t^2}} = \frac{t(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}} = t\sqrt{1-t^2},$$

$$\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{t^2}{1-t^2}(1-t^2) = t^2.$$

Po zamianie zmiennych we wzorze na \arctg dostaniemy

$$\arcsin(t) = t\sqrt{1-t^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} t^{2n},$$

⁶Mowa tutaj o *przekształceniu Eulera* (patrz np. [7]). Niestety ale zaprezentowanie jego treści wykracza poza ramy tego artykułu.

albo po przekształceniu

$$\frac{\arcsin(t)}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} t^{2n+1}, \text{ dla } t \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

Niestety, ale to nie koniec na tym. Już z dotychczasowych wyników widać, że Euler był wirtuozem techniki rachunkowej. Zobaczmy, co uczynił dalej. Zaczął od obustronnego całkowania po przedziale $[0, s]$, gdzie $s \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, całkując prawą stronę wyraz po wyrazie⁷, czyli

$$\int_0^s \frac{\arcsin(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \int_0^s t^{2n+1} dt.$$

Dla pierwszej całki wystarczy zauważyć, że funkcja pierwotna jest równa $\frac{1}{2}(\arcsin(t))^2$ i dlatego

$$\frac{1}{2}(\arcsin(s))^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \frac{s^{2n+2}}{2n+2}.$$

Na szeregu występującym po prawej stronie wzoru dokonamy kolejnego przekształcenia—zamienimy zmienne, podstawiając $2k = 2n + 2$. Wtedy wartości wskaźnika sumacyjnego będą zmieniały się od 1 do ∞ i dlatego

$$\frac{1}{2}(\arcsin(s))^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \frac{s^{2k}}{2k}.$$

Światelko w tunelu zobaczymy, jeśli zauważymy, że ciąg $\frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \frac{1}{2k}$ można zapisać za pomocą silni. Istotnie, z definicji operacji !! mamy

$$\frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \frac{1}{2k} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (2k-2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2k-1) \cdot 2k}.$$

Ale

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (2k-2) = 2(2 \cdot 2)(2 \cdot 3)(2 \cdot 4) \dots 2(k-1) = 2^{k-1} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (k-1) = 2^{k-1} (k-1)!$$

Podobnie

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2k-1) \cdot 2k = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k-1) 2k}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (2k-2)} = \frac{(2k)!}{2^k (k-1)!}.$$

Dlatego

$$\frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \frac{1}{2k} = \frac{[(k-1)!]^2}{(2k)!} 2^{2k-2}.$$

⁷Oczywiście Euler wcześniej wykazał, że tak można (patrz np. [7]).

Wracając do głównego rachunku otrzymamy

$$\frac{1}{2}(\arcsin(s))^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[(k-1)!]^2}{(2k)!} (2s)^{2k-2}$$

lub równoważnie

$$2(\arcsin(s))^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[(k-1)!]^2}{(2k)!} (2s)^{2k} \text{ dla } s \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

Przyjmując w ostatnim wzorze $s = \frac{1}{2}$, ponieważ $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, dostaniemy

$$\frac{\pi^2}{18} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[(k-1)!]^2}{(2k)!}.$$

Zaraz, zaraz, przecież miał być szereg α -harmoniczny. Domyślamy się co chcemy napisać—Euler wykazał, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[(k-1)!]^2}{(2k)!},$$

co pozwala nam ostatecznie podać treść słynnego wzoru Eulera

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

W rozdziale 2 wzór ten pozwoli nam rozwiązać ciekawy problem liczb względnie pierwszych.

1.3 Liczba π a liczby pierwsze

Czas aby dokładniej przyjrzeć się funkcji dzeta Riemanna. Euler jako pierwszy zauważył, że istnieje związek pomiędzy tą funkcją a zbiorem *liczb pierwszych*. Przypomnijmy, że liczby pierwsze to takie liczby naturalne $p > 1$, których rozkład na *czynniki pierwsze* jest trywialny, czyli ma postać $p = 1 \cdot p$. Dlatego na przykład liczby 2, 3, 5, 7, 11 są liczbami pierwszymi. Oznaczmy zbiór wszystkich liczb pierwszych przez \mathbf{P} . Już Euklides zauważył, że zbiór liczb pierwszych nie może być skończony. Euklides rozumował następująco: gdyby tak nie było, to $\mathbf{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. W takim razie liczba $n = p_1 p_2 \dots p_n + 1$ na pewno nie mogłaby być pierwsza, bowiem nie należy do zbioru \mathbf{P} . Z drugiej strony, przy dzieleniu przez każdą liczbę pierwszą p_j daje resztę 1, stąd jej rozkład na czynniki pierwsze ma postać $n = 1 \cdot n$. W takim razie musi być liczbą pierwszą, co przeczy temu, że zbiór \mathbf{P} jest skończony. Dlatego zbiór liczb pierwszych nie jest skończony. Euklides zauważył więcej, co przeszło do historii literatury przedmiotu pod nazwą *twierdzenia o faktoryzacji* (patrz np. [14]). Udowodnił bowiem, że każdą liczbę naturalną $n > 1$ można przedstawić w postaci $n = p_1 p_2 \dots p_k$, gdzie $p_j \in \mathbf{P}, k \geq 1$ i rozkład ten jest jedyny.

Po tym wstępie wróćmy do funkcji dzeta. Ustalmy liczbę pierwszą p . Wtedy dla każdego $s > 1, 1 < \frac{1}{p^s} < 1$ i dlatego dla nieskończonego postępu geometrycznego $\left(\frac{1}{p^{ks}}\right)_{k \geq 1}$ mamy

$$1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}.$$

Przypuśćmy, że czynność tę powtórzyliśmy dla n kolejnych liczb pierwszych p_1, p_2, \dots, p_n (pamiętamy, że \mathbf{P} jest zbiorem nieskończonym). Pomnóżmy stronami otrzymane równania przez siebie, czyli

$$\left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{1}{p_1^{k_1 s}}\right) \left(\sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{1}{p_2^{k_2 s}}\right) \dots \left(\sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{1}{p_n^{k_n s}}\right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{p_1^s}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_2^s}} \dots \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^s}}.$$

Spójrzmy na lewą stronę ostatniej równości. Z zasady rozdzielności mnożenia względem dodawania i twierdzenia o *granicy iloczynu*, po lewej stronie dostaniemy sumę wyrażen postaci

$$\frac{1}{p_1^{j_1 s}} \frac{1}{p_2^{j_2 s}} \dots \frac{1}{p_r^{j_r s}} = \frac{1}{(p_1^{j_1} p_2^{j_2} \dots p_r^{j_r})^s}.$$

Z twierdzenia Euklidesa o faktoryzacji wynika, że iloczyny $p_1^{j_1} p_2^{j_2} \dots p_r^{j_r}$ generują zbiór liczb naturalnych większych od jednośc. Ponieważ w sumie po lewej stronie jest również składnik równy 1, więc lewa strona dla dostatecznie dużego n będzie miała postać

$$1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots + \frac{1}{k^s}.$$

W takim razie, przechodząc do granicy przy $n \rightarrow \infty$ dostaniemy

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_j^s}}.$$

W matematyce ostatnią granicę nazywa się *iloczynem nieskończonym*, co zapisuje się symbolicznie $\prod_{j=1}^{\infty}$. Dlatego dla funkcji dzeta Riemanna mamy równość

$$\zeta(s) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_j^s}} \text{ dla } s > 1.$$

W takim razie, ponieważ wiemy, że $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, mamy kolejną, należącą również do Eulera, reprezentację liczby π , tym razem związaną z liczbami pierwszymi

$$\frac{\pi^2}{6} = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_j^2}}.$$

1.4 Iloczyn Wallisa jako reprezentacja π

Do tej pory głównie pokazywaliśmy metody prowadzące do wyreprezentowania liczby π za pomocą szeregów liczbowych. Nie ulega wątpliwości, że w zdecydowanej większości przypadków stało się to za sprawą wielkiego Eulera. Nie tylko jednak on przeszedł do historii matematyki jako odkrywca takich zależności. Na uwagę zasługuje również oryginalny wynik J. Wallisa (1616–1703), którym właśnie teraz zajmiemy się. Istnieje wiele sposobów uzyskania wyniku Wallisa. Jak zwykle prym wiedzie tutaj Euler. Metoda, którą zaprezentujemy wydaje się być najprostsza, bowiem technicznie najmniej wymagająca i trochę zapomniana. Tym bardziej warta jest odświeżenia.

Pomysł polega na tym aby skonstruować pewien regularny ciąg liczbowy⁸ biorący się z scałkowania funkcji \sin^n . Dokładniej, niech

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx, \text{ dla } n \geq 0.$$

Nie ma większego problemu z pierwszymi dwoma wyrazami tego ciągu, bowiem $a_0 = \frac{\pi}{2}$ oraz

$$a_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx = -\cos(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Zapamiętajmy te wyniki, dalej będą nam potrzebne. W takim razie weźmy teraz $n \geq 2$. Ponieważ $\sin^n(x) = \sin^{n-1}(x)\sin(x)$, więc mamy do czynienia z klasyczną sytuacją – funkcja podcałkowa jest iloczynem i możemy próbować zastosować metodę *całkowania przez części* (patrz np. [7]).

Postępując zgodnie z procedurą bierzemy rozkład

$$\begin{aligned} u &= \sin^{n-1}(x), & dv &= \sin(x) dx \\ du &= (n-1)\sin^{n-2}(x)\cos(x), & v &= -\cos(x). \end{aligned}$$

Ze wzoru na całkowanie "przez części" dostaniemy teraz

$$a_n = -\cos(x)\sin^{n-1} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)\cos^2(x) dx.$$

Pozwala to nam napisać

$$\begin{aligned} a_n &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)(1 - \sin^2(x)) dx = \\ &= -(n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x) dx. \end{aligned}$$

⁸Ciągi takie nazywamy *rekurencyjnymi* (patrz np. [12]).

Po uporządkowaniu dostaniemy

$$a_n = -(n-1)a_n + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x) dx,$$

co ostatecznie daje

$$a_n = \frac{n-1}{n} (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x) dx = \frac{n-1}{n} (n-1) a_{n-2}.$$

Aby wyznaczyć kolejne (dla $n \geq 2$) wyrazy tego ciągu posłużymy się wielokrotnie powyższą zależnością. Dla $n = 2$ wygląda to prosto, bowiem

$$a_2 = \frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}.$$

Dla $n > 2$ przebiega to tak

$$a_n = \frac{n-1}{n} (n-1) a_{n-2} = \frac{n-1}{n} \frac{n-2-1}{n-2} a_{n-4}.$$

Rozważymy teraz dwa przypadki, kiedy n jest parzyste i nieparzyste. W sytuacji pierwszej, powtarzając odpowiednią ilość razy powyższy rachunek, otrzymamy

$$a_n = \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \frac{n-5}{n-4} \cdots \frac{1}{2} a_0 = \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \frac{n-5}{n-4} \cdots \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}.$$

Jeśli teraz n jest nieparzyste, to wyglądało to będzie następująco

$$a_n = \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \frac{n-5}{n-4} \cdots \frac{2}{3} a_1 = \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \frac{n-5}{n-4} \cdots \frac{2}{3}.$$

Dalej wygodniej będzie zapisać oba wzory przedstawiając liczbę parzystą jako $2n$, nieparzystą $2n+1$. Otrzymamy to w wyniku podstawienia w tych wzorach odpowiednio $2n$ i $2n+1$. Wtedy wyrazy parzyste ciągu (a_n) będą miały postać

$$a_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} \frac{2n-5}{2n-4} \cdots \frac{1}{2} \frac{\pi}{2},$$

natomiast nieparzyste

$$a_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \frac{2n-2}{2n-1} \frac{2n-4}{2n-3} \cdots \frac{2}{3}.$$

Dla dalszego rozumowania istotne wydaje się być zauważenie, że ciąg (a_n) zachowuje się monotonicznie, czyli

$$0 < a_{2n+1} \leq a_{2n} \leq a_{2n-1}.$$

Wynika to wprost z jego definicji i własności funkcji \sin dla argumentu z przedziału $[0, \frac{\pi}{2}]$. Ponieważ wtedy $\sin(x) \in [0, 1]$, więc

$$\sin^{2n+1}(x) \leq \sin^{2n}(x) \leq \sin^{2n-1}(x),$$

co z monotoniczności całki uzasadnia monotoniczność ciągu (a_n) .

W takim razie mamy

$$1 \leq \frac{a_{2n}}{a_{2n+1}} \leq \frac{a_{2n-1}}{a_{2n+1}}.$$

Czas wykorzystać uzyskane wyniki. Z otrzymanych wzorów na a_{2n} i a_{2n+1} , nierówność $1 \leq \frac{a_{2n}}{a_{2n+1}}$ wynika, że

$$1 \leq \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} \frac{2n-5}{2n-4} \cdots \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2n+1}{2n} \frac{2n-1}{2n-2} \frac{2n-3}{2n-4} \cdots \frac{3}{2},$$

co możemy zapisać następująco

$$1 \leq \frac{2n+1}{2n} \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-1}{2n-2} \frac{2n-3}{2n-2} \frac{2n-3}{2n-4} \cdots \frac{5}{4} \frac{3}{4} \frac{3}{2} \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}.$$

Analogicznie, dla ilorazu $\frac{a_{2n-1}}{a_{2n+1}}$ możemy zapisać

$$\frac{a_{2n-1}}{a_{2n+1}} = \frac{a_{2(n-1)+1}}{a_{2n+1}} = \frac{2n-2}{2n-1} \frac{2n-4}{2n-3} \frac{2n-6}{2n-5} \cdots \frac{2}{3} \cdot \frac{2n+1}{2n} \frac{2n-1}{2n-2} \frac{2n-3}{2n-4} \cdots \frac{3}{2},$$

co po skróceniu daje

$$\frac{a_{2n-1}}{a_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n}.$$

Z przedstawionych wyżej rachunków wynika, że

$$1 \leq \frac{2n+1}{2n} \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-1}{2n-2} \frac{2n-3}{2n-2} \frac{2n-3}{2n-4} \cdots \frac{5}{4} \frac{3}{4} \frac{3}{2} \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} \leq \frac{2n+1}{2n}.$$

Z twierdzenia o trzech ciągach oznacza to, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n} \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-1}{2n-2} \frac{2n-3}{2n-2} \frac{2n-3}{2n-4} \cdots \frac{5}{4} \frac{3}{4} \frac{3}{2} \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = 1,$$

co oznacza, po zmianie kolejności czynników w iloczynie, że

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1} \frac{2}{3} \frac{4}{3} \frac{4}{5} \frac{6}{5} \cdots \frac{2n-2}{2n-1} \frac{2n}{2n-1} \frac{2n}{2n+1}.$$

Jest to sygnalizowany na wstępie słynny wzór Wallisa, przedstawiający liczbę π w postaci iloczynu nieskończonego. Co za zaskakująca regularność!

1.5 Liczba π jako nieskończony ułamek łańcuchowy

Którż z nas nie słyszał o *zasadzie podzielności*. Przecież o tym była mowa już w szkole podstawowej. Przypomnijmy ją aby łatwiej było kontynuować rozumowanie. W myśl tej zasady, dla dowolnej liczby całkowitej p i naturalnej q istnieją liczby całkowite w, r , że

$$p = wq + r, \text{ gdzie } r \in \{0, 1, 2, \dots, q - 1\}.$$

Co więcej, liczby w, r o podanych własnościach wyznaczone są jednoznacznie. Mówimy wtedy, że r jest *resztą* z dzielenia p przez q . Jeśli dodatkowo $r = 0$, oznacza to, że q dzieli p .

Zasada ta pozwala zapisać każdą liczbę wymierną w postaci pewnego szczególnego ułamka. Ale po kolei. Przede wszystkim zapiszmy zasadę podzielności w innej, równoważnej postaci

$$\frac{p}{q} = w + \frac{r}{q}.$$

Wtedy po lewej stronie tej równości mamy liczbę wymierną. Prawa strona mówi, że liczbę tę można jednoznacznie przedstawić w postaci frakcji całkowito-liczbowej w i ułamkowej $\frac{r}{q} \in [0, 1)$.

Weźmy ten ułamek, zakładając, że $r > 0$, i zapiszmy go w postaci

$$\frac{r}{q} = \frac{1}{\frac{q}{r}},$$

a następnie dla liczby $\frac{q}{r}$ ponownie zastosujmy zasadę podzielności

$$\frac{q}{r} = w_1 + \frac{r_1}{q}, \quad r_1 \in \{0, 1, \dots, r - 1\}.$$

Po podstawieniu do ułamka $\frac{r}{q}$ dostaniemy

$$\frac{r}{q} = \frac{1}{w_1 + \frac{r_1}{q}}.$$

Procedurę tę możemy powtarzać dopóty, dopóki w i -tym kroku $r_i > 0$, ale co najwyżej po r krokach, z powodu, że ciąg powstałych reszt (r_i) jest malejącym ciągiem liczb całkowitych nieujemnych. W efekcie zastosowania tej procedury otrzymamy

$$\frac{p}{q} = w + \frac{1}{w_1 + \frac{1}{w_2 + \frac{1}{w_3 + \dots \frac{1}{w_j}}}}$$

Drugi składnik ostatniej sumy nazywamy *ułamkiem łańcuchowym*. Prześledźmy to jeszcze raz na przykładzie liczby $\frac{99}{17}$. Dostaniemy kolejno

$$\begin{aligned} \frac{99}{17} &= 5 + \frac{14}{17} = 5 + \frac{1}{\frac{17}{14}} = 5 + \frac{1}{1 + \frac{3}{14}} = 5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{14}{3}}} = 5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{2}{3}}} = \\ &= 5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}. \end{aligned}$$

Czytelnik pewnie zastanawia się czego oczekujemy od pojęcia ułamka łańcuchowego. Przecież posługiwanie się tym pojęciem jest kłopotliwe—zajmuje sporo czasu i miejsca na kartce papieru. Domyślamy się, że powód jest i jak najszybciej musimy o nim napisać. Przede wszystkim nie chodzi tutaj o liczby wymierne. Je prościej jest zapisać w układzie pozycyjnym, na przykład dziesiętnym. Skoro tak, to będziemy mówili o liczbach niewymiernych. Ale każdy ułamek łańcuchowy jest liczbą wymierną, więc coś jest nie tak. To też wyjaśnimy, tym razem zaczynając od przykładu, biorąc do tego $\sqrt{2} - 1$.

Bezpośrednim rachunkiem możemy sprawdzić, że $\sqrt{2} - 1$ jest jedynym pierwiastkiem równania

$$x^2 + 2x - 1 = 0 \text{ dla } x > 0.$$

Równanie to zapiszemy inaczej

$$x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x(x + 2) - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{x + 2}.$$

Z równania tego, w wyniku podstawiania w miejsce x po jego prawej stronie wyrażenia $\frac{1}{x+2}$, otrzymamy

$$x = \frac{1}{2 + \frac{1}{x + 2}}.$$

Wygląda to znajomie, przecież to jest (algebraiczny) ułamek łańcuchowy. Oznaczmy prawą stronę powyższej równości przez $f_1(x)$. Jeśli powtórzymy tę procedurę dla równania $x = f_1(x)$, to dostaniemy

$$x = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + x}}}.$$

Prawą stronę otrzymanego równania oznaczmy przez $f_2(x)$. Porównując dwa ostatnie równania łatwo zauważyć, że ponieważ

$$f_2(x) = f_1\left(\frac{1}{x+2}\right),$$

drugie równanie ma postać

$$x = f_1\left(\frac{1}{x+2}\right).$$

Nietrudno sprawdzić, że jeśli procedurę tę przeprowadzimy n razy, a przez $f_n(x)$ oznaczmy prawą stronę otrzymanego równania

$$x = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots \frac{1}{2+x}}}},$$

to

$$x = f_n(x) \text{ dla } x > 0$$

oraz

$$f_{n+1}(x) = f_n\left(\frac{1}{x+2}\right)$$

Z konstrukcji kolejnych równań wynika, że każde z nich ma to samo rozwiązanie x_o w zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich, mianowicie $x_o = \sqrt{2}-1$. Z powyższego wynika, że dla x_o , ciąg $(f_n(x_o))$ jest zbieżny do x_o . Symbolicznie ostatnie stwierdzenie możemy zapisać następująco

$$\sqrt{2}-1 = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

i nazywamy *ciągłym ułamkiem łańcuchowym*.

W takim razie liczbę niewymierną $\sqrt{2}$ możemy wyreprezentować jako

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

Teraz wszystko jest jasne. Ciągły ułamek łańcuchowy pozwalający wyreprezentować liczbę niewymierną $\sqrt{2}$ wykazuje zadziwiającą regularność, w przeciwieństwie do efektu zapisu dziesiętnego, który w ogóle, poprzez skrajną nieregularność, nie jest możliwy.

I ogólnie, można udowodnić, że każdą liczbę niewymierną i tylko liczbę niewymierną można przedstawić w postaci ciągłego ułamka łańcuchowego (patrz np. [12]). Mistrzem w reprezentowaniu liczb niewymiernych za pomocą ciągłych ułamków łańcuchowych był Euler.

W przypadku liczby π wykazał (szczegóły pominiemy), że

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \frac{7^2}{2 + \frac{9^2}{2 + \ddots}}}}}}.$$

Jest to jednocześnie jeden z dowodów na to, że π jest liczbą niewymierną.

1.6 Liczba π a najpiękniejszy wzór matematyki

Zanim przedstawimy najpiękniejszy wzór matematyki, potrzebujemy jeszcze jednej ważnej liczby rzeczywistej. Liczba π związana jest z równie ważną liczbą, zwaną *liczbą Eulera*⁹, którą symbolicznie oznaczamy literą e . Domyślamy się na czym polega problem – jest ona liczbą niewymierną, co po raz pierwszy pokazał Euler.¹⁰

Znanych jest kilka sposobów definiowania liczby e . Wspomnimy tutaj tylko o tych najbardziej znanych.

1. Liczbę e definiuje się¹¹ jako granicę ciągu rosnącego i ograniczonego z góry (a_n) , gdzie

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Większość Czytelników tego tekstu zapewne w takich okolicznościach z tą liczbą zapoznała się.

2. O wiele mocniejszym wynikiem jest przedstawienie liczby e jako sumy następującego szeregu liczbowego¹²

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Argumentów, że tak jest jest wiele. Jednym z nich jest szybkość zbieżności tego szeregu do e , która jest nieporównywanie większa, aniżeli ciągu (a_n) . Kolejny, koronny argument wykorzystuje ten szereg do zdefiniowania jednej z najważniejszych *funkcji elementarnych*, tzw. *eksponenty*, czyli funkcji

$$\mathbf{R} \ni x \longrightarrow e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

3. Niech f oznacza funkcję rzeczywistą różną od stałej i różniczkowalną, dla której

$$f'(x) = f(x) \text{ dla wszystkich rzeczywistych } x.$$

Wtedy f musi być eksponentą.

4. Weźmy funkcję f daną wzorem

$$[1, \infty) \ni x \longrightarrow \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

Wówczas jedynym rozwiązaniem równania $f(x) = 1$ jest liczba e .

⁹Czasami nazywana jest *liczbą Nepera*. J. Napier (Neper) (1550–1617), szkocki właściciel ziemski jest odkrywcą logarytmów naturalnych, które w podstawie miały liczbę e .

¹⁰Jest nawet przestępna, co wykazał Ch. Hermite (1822–1901). Z prac Hermite'a korzystał później Lindemann dowodząc przestępności liczby π .

¹¹Po raz pierwszy zrobił to J. Bernoulli (1667–1748)

¹²Wynik ten należy do Eulera. Od 1728 r. liczba ta oznaczana jest symbolem e .

Istnieje ścisły związek pomiędzy tymi dwiema ważnymi liczbami. Po raz pierwszy dostrzegł to A. de Moivre (1667–1754) pokazując, że wynik operacji $n!$ jest asymptotycznie równy $cn^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$, dla pewnej stałej rzeczywistej c . Oznacza, to że

$$\frac{n!}{cn^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}} \longrightarrow 1.$$

Następnie J. Stirling (1692–1770) poprawił ten wynik pokazując, że stała c we wzorze de Moivre’a jest równa $\sqrt{2\pi}$. Wynik ten przeszedł do historii jako tzw. *wzór Stirlinga* w postaci

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

albo równoważnie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1.$$

Stąd już mały krok do sygnalizowanej zależności pomiędzy liczbami π i e ,

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{\sqrt{2\pi n}}{n!} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Po tych dywagacjach na temat liczby Eulera możemy wrócić do wyjaśnienia co rozumiemy przez najpiękniejszy wzór w matematyce. Związane to jest z kolejnym wielkim odkryciem, sformalizowanym przez Gaussa i W.R. Hamiltona (1805–1865), a dotyczącym *ciała liczb zespolonych*¹³. Jest rzeczą zdumiewającą, że Gaussowi brakło wyobraźni i poprzestał na algebraicznym opisie liczb zespolonych, nie zauważając potrzeby wykorzystania ich interpretacji geometrycznej, aczkolwiek w literaturze mówi się o *płaszczyźnie Gaussa*.¹⁴

Spojrzenie na liczby zespolone z perspektywy geometrii spowodowało, że dotychczasowy *kartezjański układ* współrzędnych należało zastąpić *układem polarnym*, zwanym też *biegunowym*. W układzie takim każdą liczbę zespoloną z rozumianą jako punkt płaszczyzny zespolonej można jednoznacznie opisać parą liczb:

- ρ -jej odległością od ustalonego punktu, zwaną *modułem* $|z|$
- φ -jej azymutem liczonym względem ustalonej półprostej, zwanej *argumentem głównym* $argz$.

Doprowadziło to do *postaci wykładniczej* liczby zespolonej, którą po raz pierwszy metodami czysto analitycznymi uzyskał Euler¹⁵

¹³Liczby zespolone odkrył o wiele wcześniej Girolamo Cardan (1501–1576), który nie wierząc w rzeczywiste istnienie odkrytych liczb, liczbie zespolonej i nadał nazwę *jedności urojonej*.

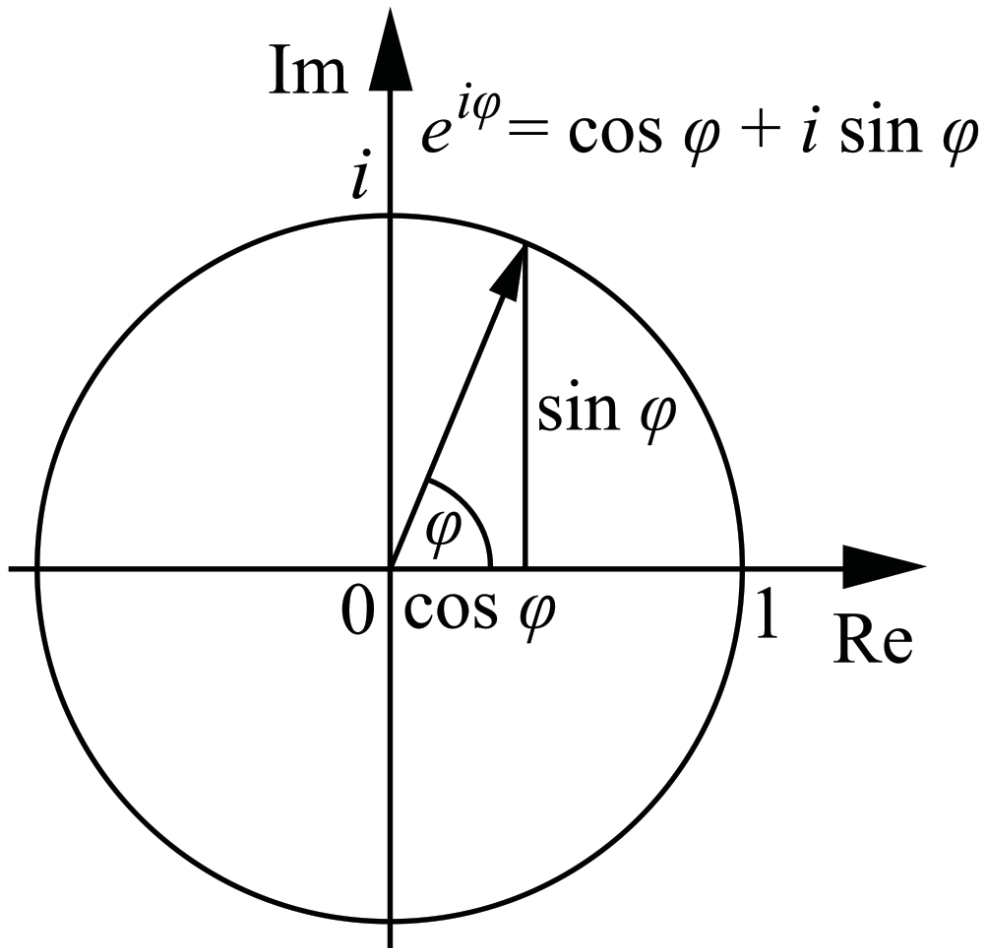
¹⁴Zauważył to po raz pierwszy matematyk norwesko-duński J.H. Wessel (1745–1818).

¹⁵Euler również nigdy nie widział interpretacji geometrycznej przedstawionej na rys. 2.

W serwisie YouTube <http://www.youtube.com/watch?v=zApx1UlkpNs> & feature, na temat tego wzoru zamieszczono film pokazujący dowód wzoru Eulera.

$$z = \rho e^{i\varphi} = \rho(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)),$$

gdzie i oznacza *jedność urojoną* wprowadzoną przez G. Cardano (patrz ¹¹).



Rysunek 2: ilustracja geometryczna wzoru Eulera dla $\rho = 1$

Podstawmy we wzorze Eulera $\rho = 1, \varphi = \pi$. Dostaniemy wtedy

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Oto najpiękniejszy wzór matematyki! Urzeka swoją prostotą i przejrzystością. Łączy on w sobie wysiłek intelektualny wielu pokoleń matematyków. Pokazuje siłę i skuteczność rozumowania opartego na starej regule arystotelowskiej posługującej się tylko *prawdą* i *falszem*. Kojarzy teorię liczb z zaawansowanymi metodami teorii funkcji rzeczywistych, geometrię z abstrakcyjną strukturą ciała zespolonego. Znalazło się w nim miejsce na pięć najważniejszych liczb, bowiem

- liczby 0 i 1 stanowią fundament arytmetyki liczb wymiernych, jako *elementy neutralne* dwóch działań arytmetycznych: dodawania i mnożenia. Bez tych liczb nie byłoby liczb przeciwnych, a więc i ujemnych oraz odwrotnych, czyli ułamków,
- o roli liczby π wiemy już dostatecznie dużo i darujemy sobie dodatkowe komentarze'
- znaczenie liczby Eulera jest przeogromne. Wspomnieliśmy o eksponencie, wzorze Stirlinga. Należy również wspomnieć np. o *logarytmie naturalnym*, czy *rozkładzie normalnym* jako centralnym w teorii prawdopodobieństwa,
- uzupełnienie zbioru $\{0, 1\}$ liczbą i pozwoliło wykonać, jak pokazał to Hamilton i Gauss, konstrukcję, która rozszerzyła ciało liczb rzeczywistych do ciała liczbowego, dla którego każde równanie algebraiczne nad tym ciałem ma co najmniej jeden pierwiastek.¹⁶

Na koniec powinniśmy wyraźnie podkreślić, że zbiór "ważnych" liczb w matematyce jest o wiele obszerniejszy. Należą do nich na pewno liczby: Fibonacciego, Fermata, Bernoulliego, Catalana, Mersenne'a, Stirlinga, stała Eulera i wiele innych (patrz np. [12]).

¹⁶Jest to słynne *Podstawowe Twierdzenie Algory Gausa*, które oznacza, że ciało liczb zespolonych jest *algebraicznie domknięte*.

2 Liczba π w teorii prawdopodobieństwa

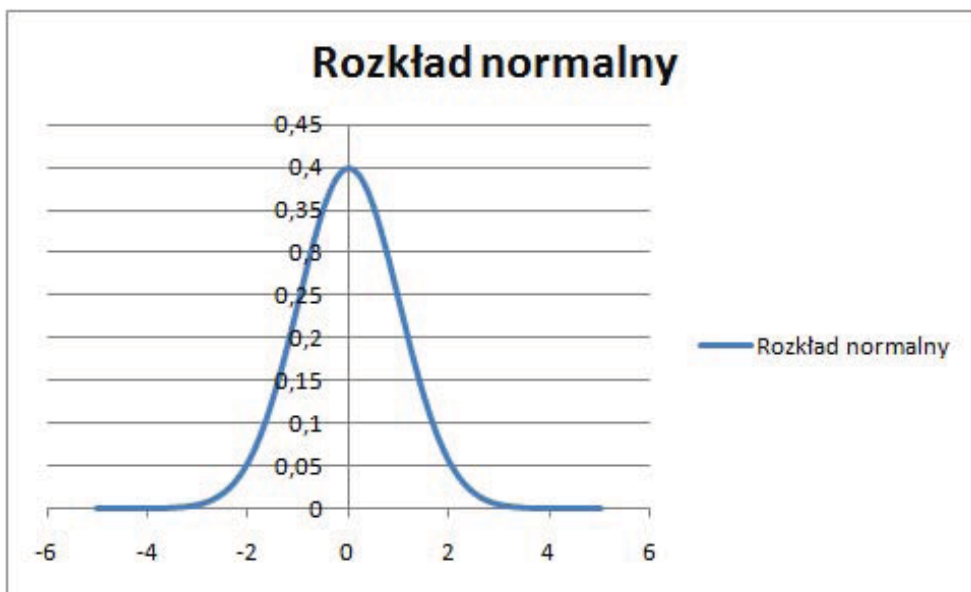
W rozdziale 1 *explicite* pokazaliśmy koneksje liczby π z geometrią, teorią liczb całkowitych i rzeczywistych, algebrą abstrakcyjną, teorią liczb zespolonych, teorią funkcji rzeczywistych. Należy stwierdzić, że związki te z powodu natury obiektu, którym interesujemy się nie powinny nikogo dziwić—można się było tego spodziewać. Natomiast to o czym chcemy napisać teraz jest już o wiele mniej intuicyjne. Okazuje się bowiem, że naturalnym środowiskiem liczby π jest również teoria prawdopodobieństwa. Spróbujemy pokazać ten fenomen na przykładzie czterech problemów.

2.1 Liczba π a krzywa dzwonowa Gaussa

Weźmy następującą funkcję

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ dla } x \in \mathbf{R},$$

której wykres przedstawia rys. 3¹⁷.



Rysunek 3: funkcja dzwonowa Joufretta

¹⁷W literaturze niesłusznie nazywana funkcją dzwonową Gaussa. Termin ten pochodzi od francuskiego oficera-artyleryzisty, E. Joufretta (1837–?) z 1872 r.

Okazuje się,¹⁸ że dla tej funkcji

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi},$$

co oznacza, że funkcja dzwonowa może być traktowana jako *gęstość ciągłego rozkładu prawdopodobieństwa* (patrz np. [6]). Rozkładem tym jako pierwszy posługiwał się de Moivre w 1773 r. Jego oficjalna nazwa, jako *rozkładu normalnego* ukuta została w 1875 r. przez CH. S. Peirece'a (1839–1914), F. Galtona (1822–1911) i W. Lexisa (1837–1914). Tymczasem, jeśli zajrzemy do dowolnego podręcznika z teorii prawdopodobieństwa, zauważymy, że synonimem nazwy tego rozkładu jest *rozkład Gaussa*. Niektórzy mówią, że zadziałało w tym wypadku jedno z *praw Murphy'ego*, tzw. *prawo Stingera*.¹⁹ Myślę, że Czytelnik wybaczy, jeśli wstrzymamy się od skomentowania tego przypadku. Z drugiej strony powinniśmy mieć świadomość, że co jak co, ale Gauss na to sobie zasłużył!

Znaczenie liczby π w omawianej sytuacji sprowadza się do roli *czynnika normalizującego* dla funkcji $e^{-\frac{x^2}{2}}$, bez którego funkcja ta nie może być funkcją gęstości żadnego rozkładu prawdopodobieństwa. Z drugiej strony, jak zauważyli to już de Moivre i P.S. Laplace (1749–1827), w przypadku *rozkładów dyskretnych*, a uogólnione zostało na klasę dowolnych rozkładów posiadających *drugi moment*,²⁰ rozkład ten jest rozkładem granicznym dla ciągu uśrednionych niezależnych kopii danego rozkładu. Jest to fundamentalne twierdzenie klasycznej teorii prawdopodobieństwa tłumaczące konsekwencje *stochastycznego* (czyli losowego) opisu zjawisk. Wbrew obawom wynikającym z intuicyjnego pojmowania zjawiska losowego, natura losowa wykazuje jednak różne przejawy regularności. Jedną z nich właśnie opisuje słynne CTG.

¹⁸Co wcale nie jest takie oczywiste, bowiem funkcja pierwotna funkcji $e^{-\frac{x^2}{2}}$ nie jest *funkcją elementarną*. Oznacza to, że przy liczeniu tej całki nie można korzystać ze standardowego twierdzenia Riemanna-Newtona-Liebnitza (patrz np. [6])

¹⁹Brzmi ono "Włączone do kontaktu, lepiej działa".

²⁰Mowa tutaj jest o twierdzeniu Lindenberga-Lévy'ego, zwanym *Centralnym Twierdzeniem Granicznym* (CTG) (patrz np. [6]).

2.2 Problem geometryczny jako zjawisko losowe

Przypuśćmy, że z odcinka $[0, 1]$ losowo wybieramy dwie liczby a, b .²¹ Należy rozstrzygnąć jakie jest prawdopodobieństwo, że można zbudować trójkąt rozwartokątny, którego odpowiednie boki mają długości równe $a, b, 1$.

Tak jak zawsze w takim przypadku, analizę problemu zaczniemy od skonstruowania przestrzeni probabilistycznej, która pozwoli nam opisać zjawisko *stricte* natury geometrycznej, językiem teorii prawdopodobieństwa. Z punktu widzenia obserwacji przedstawionego eksperymentu,²² wynikiem powinny być obie. Ponieważ dopuszczamy sytuację, że mogą być one jednakowe, nie możemy do tego celu użyć opisu mnogościowego. Dlatego, aby je od siebie odróżnić musimy ustawić je w ciąg, np. (a, b) . To z kolei nie powinno oznaczać, że w takiej kolejności liczby te były wylosowane. Po wylosowaniu obu i zapamiętaniu wyniku losowania, na pierwszym miejscu odnotowujemy liczbę, która ma nazwę a . Para ta będzie *zdarzeniem elementarnym* konstruowanej przestrzeni probabilistycznej, czyli

$$\omega = (a, b).$$

W takim razie przestrzeń wszystkich zdarzeń elementarnych Ω będzie miała postać

$$\Omega = \{\omega = (a, b) : a, b \in [0, 1]\}.$$

Zobaczmy jak będzie wyglądało *zdarzenie*, opisujące w języku teorii prawdopodobieństwa, powstanie figury płaskiej – trójkąta rozwartokątnego. Ponieważ w każdym trójkącie suma długości dwóch dowolnych jego boków jest większa od długości boku pozostałego, trójkąt ten (jako rozwartokątny) musi wyglądać tak jak przedstatwiono to na rys.4.

Z powyższej uwagi wynika, że wylosowane liczby $a, b \in [0, 1]$ muszą być takie, że $a + b > 1$. Niech A oznacza zdarzenie, że w wyniku wylosowania liczb powstał trójkąt rozwartokątny. Wtedy

$$\omega \in A \Rightarrow \omega = (a, b) \in \Omega : b > 1 - a.$$

Z drugiej strony, jeśli z liczb $a, b, 1$ ma powstać trójkąt jak na rys. 4, to ich długości muszą być takie, że $a + b > 1$ oraz

$$1 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\beta),$$

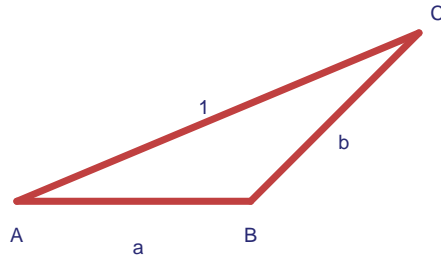
gdzie β jest miarą kąta rozwartego w tym trójkącie²³. Ale wtedy $\cos(\beta) < 0$ i dlatego

$$a^2 + b^2 < 1.$$

²¹Losowo oznacza, że ich wybór nie jest konsekwencją żadnego planu. Ważne natomiast jest to, czy wybieramy je w kolejności jeną po drugiej, czy obie na raz, bowiem to drugie oznacza, że *implicite* zakładamy, że wybrane liczby są różne. Umówimy się, że obowiązuje pierwszy wariant wyboru, ale nie jest ważna kolejność tak wylosowanych liczb.

²²Tak nazwalismy losowanie dwóch liczb z odcinka.

²³Jest to zmane *twierdzenie cosinusów*.



Rysunek 4: trójkąt rozwartokątny o bokach $a, b, 1$

Pokazaliśmy tym samym, że

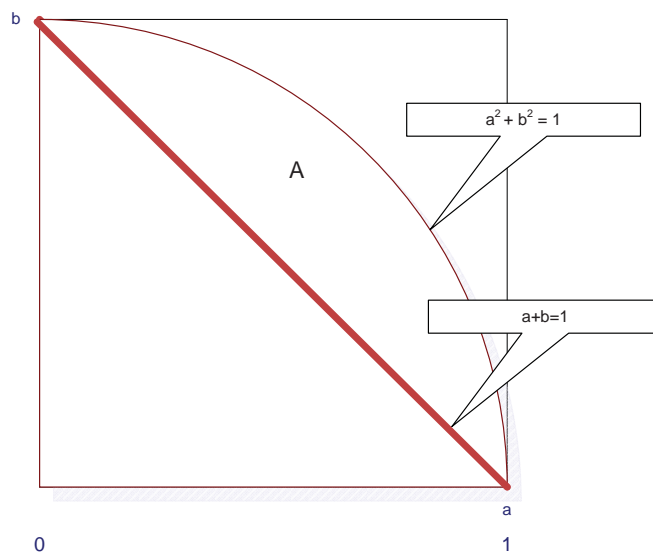
$$A = \{\omega \in \Omega: b > 1 - a \text{ i } a^2 + b^2 < 1\}.$$

Oznacza to, że zdarzenie A jest podzbiorem *borelowskim* iloczynu kartezjańskiego $[0, 1] \times [0, 1]$ i dlatego σ -ciało wszystkich zdarzeń jest rodziną wszystkich podzbiorów borelowskich. Mamy więc do czynienia z *modelem geometrycznym płaskim* przestrzeni probabilistycznej. W szczególności oznacza to, że $P(A)$ -prawdopodobieństwo zdarzenia A liczymy według reguły

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

gdzie symbolem $||$ oznaczyliśmy pole odpowiedniej figury płaskiej. Nietrudno zauważyć, że $|A| = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ i dlatego $P(A) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

To, że liczba π pojawiła się akurat w rozwiązaniu tego problemu nie powinno być zaskoczeniem—przecież był to problem związany z geometrią płaszczyzny. Jak zobaczymy, kolejny problem będzie już mniej intuicyjny i wymaga większej uwagi.



Rysunek 5: interpretacja geometryczna zdarzenia dla problemu trójkąta

2.3 Igła Buffona też potrzebuje liczby π

Wyobraźmy sobie, że mamy do dyspozycji płaszczyznę, na której usytuowano w odległości d proste równoległe. Eksperyment polega na tym, że opuszczamy na tę płaszczyznę *igłę* tej samej długości co d . Doświadczenie przebiega prawidłowo, jeśli igła na skutek upadku będzie leżała na powierzchni płaszczyzny.

Problem *igły Buffona*²⁴ sprowadza się do następującego pytania:

z jakim prawdopodobieństwem igła po upadku przetnie prostą na tej płaszczyźnie?

Zanim przejdziemy do opisu modelu probabilistycznego tego doświadczenia, zwrócimy uwagę jeszcze kilka szczegółów.

1. Termin „przecnie” wyklucza zjawisko *dotknie*, zatem igła może przeciąć co najwyżej jedną taką linię.

²⁴Właściwie George–Louis Leclerc hrabia Buffon. Problem ten Leclerc sformułował po raz pierwszy w 1773 r., rozwiązał dopiero cztery lata później.

2. Umówimy się, że eksperymentator wykonujący rzuty igłą i odczytujący jej położenie po upadku zajmuje stałą orientację względem linii na płaszczyźnie. Załóżmy, że jego wzrok przecina te linie prostopadle.
3. Jeśli igła upadnie, to w przypadku kiedy nie jest prostopadła do linii, będziemy wyróżniali jej *lewy koniec*, w przeciwnym razie jej *dolny koniec*.

Możemy teraz określić układ odniesienia, który pozwoli nam na opis leżącej po upadku igły na płaszczyźnie.

Układem tym będzie ta (jedyna) prosta, która znajduje się poniżej wyróżnionego końca naszej igły. Sam opis położenia igły będzie polegał na podaniu wartości dwóch liczb (x, α) , gdzie

x oznacza odległość końca igły od tej prostej,

α jest miarą kąta skierowanego liczonego od tej prostej, w kierunku przeciwnym do wskazówek zegara, do prostej wyznaczonej przez igłę.

Taki opis położenia igły, czyli opis wyniku doświadczenia będzie zdarzeniem elementarnym. Zatem

$$\Omega = \{\omega = (x, \alpha): x \in (0, d), \alpha \in [0, \pi)\}.$$

Niech A opisuje sytuację, kiedy w wyniku poprawnie przeprowadzonego eksperymentu igła przetnie jedną z linii.

Zauważmy, że

$$\omega \in A \Leftrightarrow x + d \sin \alpha > d, \text{ dla } \alpha \in (0, \pi),$$

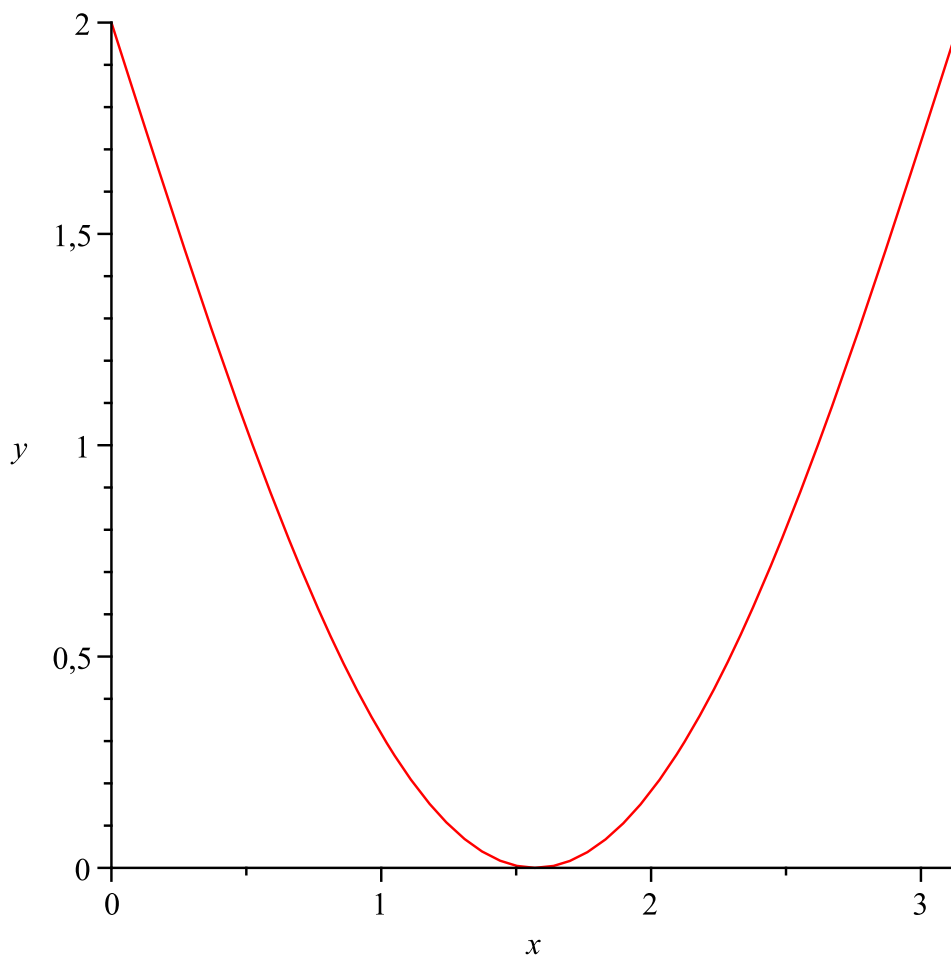
czyli

$$A = \{(x, \alpha): \alpha \in (0, \pi), x = x(\alpha) \in (d(1 - \sin \alpha), d)\}.$$

Zbiór ten jest podzbiorem borelowskim płaszczyzny i mamy do czynienia, jak w poprzednim podrozdziale, z dwuwymiarowym modelem geometrycznym.

Z drugiej strony z teorii całki dobrze wiadomo, że jest to tzw. *trapez krzywoliniowy* (rys. 6), a jego wielkość, czyli pole, można obliczyć za pomocą całki, dlatego

$$P(A) = \frac{1}{\pi d} \int_0^\pi (d - d(1 - \sin \alpha)) d\alpha = \frac{d}{\pi d} \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha = \frac{2}{\pi}.$$



Rysunek 6: interpretacja geometryczna zdarzenia dla problemu Buffona

Teraz wszystko jest jasne i nikogo nie powinno dziwić, że liczba π pojawia się w rozwiązaniu problemu Buffona. Opis probabilistyczny podkreśla związek rzutu igłą z geometrią—obrotem igły zauważanym z punktu widzenia linii horyzontalnych pokrywających płaszczyznę.

2.4 Losowanie liczb względnie pierwszych a liczba π

Zacznijmy od definicji. Powiemy, że dwie liczby całkowite p, q są *względnie pierwsze*, jeśli ich największym wspólnym dzielnikiem jest liczba 1. Na przykład 4 i 8 nie są względnie pierwsze, natomiast -7 i 9 są względnie pierwsze. Wprost z definicji każde dwie liczby pierwsze muszą być względnie pierwsze. Ponadto, łatwo uzasadnić²⁵, że dwie kolejne liczby naturalne też są względnie pierwsze. Mimo, że nie każde dwie liczby naturalne p, q są względnie pierwsze, to zawsze dzieląc obie przez ich największy wspólny dzielnik, dostaniemy dwie liczby p', q' , które już względnie pierwsze są. Ponadto, jeśli każda z liczb nie dzieli się przez liczbę pierwszą, to tak wybrane liczby muszą być względnie pierwsze. Dalej skorzystamy z tej praktycznej uwagi. Umówimy się, że ograniczymy się tylko do zbioru liczb naturalnych.

Założmy, że wybór pary liczb będziemy traktowali jako zdarzenie elementarne. Ponieważ interesują nas tylko różne wylosowane liczby oraz nie ma powodów aby spośród wylosowanych wyróżnić jedną z nich, przyjmujemy, że $\omega = \{a, b\}$. Niech A oznacza zdarzenie, że wylosowana para liczb jest względnie pierwsza. Postawmy formalne pytanie

jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia A ?

Jeśli chcemy odnieść się do tego pytania, to musimy ustalić model probabilistyczny opisujący omawiane zjawisko. Wiemy już, że Ω jest zbiorem wszystkich dwu-elementowych podzbiorów $\{n, m\}$, rodzina wszystkich możliwych zdarzeń jest rodziną wszystkich podzbiorów Ω . Pozostaje problem funkcji prawdopodobieństwa P . Ponieważ nie ma powodu aby jakaś wylosowana para była wyróżniona, należy przyjąć, że w tym modelu dla każdej $\omega \in \Omega$, $P(\{\omega\})$ jest jednakowe²⁶. Ponieważ Ω nie jest zbiorem skończonym, więc gdyby $P(\{\omega\}) > 0$, $P(\Omega) > 1$, co jak dobrze wiemy jest niemożliwe. Oznacza to, że nie mamy żadnych teoretycznych podstaw twierdzić *a priori*, że wybór pary liczb można opisać modelem probabilistycznym i na tej podstawie odpowiedzieć na postawione pytanie. Jak wykazaliśmy wyżej, takiego modelu po prostu nie ma, bowiem nie istnieje nieskończony model jednorodny.

Można jednak pozostać przy opisie probabilistycznym dyskutowanego zjawiska, o ile założymy, że wybór pary liczb będzie odbywał się ze skończonego podzbioru zbioru liczb naturalnych. Z formalnego punktu widzenia będziemy mieli wtedy do czynienia z ciągiem przestrzeni probabilistycznych $(\Omega_n, \Sigma_n, P_n)$ oraz ciągiem zdarzeń $A_n \in \Sigma_n$, gdzie $A_n = A \cap \Omega_n$, $\bigcup A_n = A$ i ciąg $P_n(A_n) \rightarrow \mathbf{p}$ dla pewnej liczby $\mathbf{p} \in (0, 1)$. Wtedy liczbę \mathbf{p} tak skonstruowaną możemy nazywać *asymptotycznym prawdopodobieństwem* zdarzenia A . Powinniśmy jednak pamiętać, że liczba ta nie jest prawdopodobieństwem w rozumieniu teorii prawdopodobieństwa. Tak też będziemy rozumieli postawiony na wstępie problem.

²⁵Wystarczy skorzystać z zasady podzielności.

²⁶Taki model probabilistyczny nazywamy *dyskretnym, jednorodnym* (patrz np. [13]).

Poniżej w szczególności podamy sposób wyliczenia wyrazów ciągu $P_n(A_n)$ i jego granicy \mathbf{p} , która jak domyślamy się, związana jest z liczbą $\boldsymbol{\pi}$.

Ustalmy w tym celu liczbę naturalną $n \geq 2$ i weźmy pod uwagę ciąg zbiorów

$$\Omega_n \text{ –rodzina wszystkich dwu–elementowych podzbiorów } \{1, 2, \dots, n\}$$

z σ –ciałem zdarzeń Σ_n złożonym ze wszystkich podzbiorów Ω_n i prawdopodobieństwem *klasycznym* P_n . Przez \mathcal{P}_n oznaczmy zbiór wszystkich liczb pierwszych mniejszych od n . Dla ustalonej liczby pierwszej $p \in \mathcal{P}_n$, niech $A_{p,n}$ oznacza zdarzenie w Σ_n złożone z tych zdarzeń elementarnych $\omega = \{m, k\} \in \Omega_n$, że liczba p nie dzieli m i k . Dalej, celem uproszczenia obliczeń założymy, że

$$n \in \{p_1 p_2, p_1 p_2 p_3, \dots\},$$

gdzie przez p_j oznaczyliśmy kolejne liczby pierwsze.

Ustalmy takie n i liczbę pierwszą $p_j < n$. Z definicji liczb względnie pierwszych (pisaliśmy o tym na wstępie) wynika, że

$$\bigcap_{p_j \in \mathcal{P}_n} A_{n,p_j} = \{\omega \in \Omega_n : \omega = \{m, k\} \text{ oraz } p_j \text{ nie dzieli żadnej z nich}\}.$$

Dlatego

$$A \cap \Omega_n = A_n = \bigcap_{p_j \in \mathcal{P}_n} A_{n,p_j}.$$

Obliczymy najpierw $P_n(A_{n,p})$. W tym celu obliczymy prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego. Ze wzoru na prawdopodobieństwo klasyczne mamy

$$P_n(A_{n,p_j}^c) = \frac{|A_{n,p_j}^c|}{|\Omega_n|}.$$

Z opisu zdarzeń elementarnych wynika, że Ω_n jest zbiorem wszystkich dwu–elementowych kombinacji zbioru n –elementowego, dlatego $|\Omega_n| = \binom{n}{2}$. Zliczymy elementy zbioru A_{n,p_j}^c . Z definicji elementy te są postaci

$$\omega = \{m, k\}, \text{ gdzie } p_j \text{ dzieli obie liczby } m, k.$$

Dla wygody założymy, że $m > k$ (wiemy, że zawsze są różne). Oznacza to, że jeśli

$$m \in \{p_j, 2p_j, \dots, sp_j\} \subset \{1, 2, \dots, n\},$$

gdzie z założenia o wyborze n , $n = sp_j$ dla pewnej liczby s . Jeśli teraz wybierzemy $m = lp_j$ ($l = 1, 2, \dots, s$), to takiemu wyborowi odpowiada wybór liczby k też podzielnej przez p_j na $l - 1$ sposobów. Oznacza to, że

$$|A_{n,p_j}^c| = 0 + 1 + 2 + \dots + s - 1 = \frac{s}{2}(s - 1).$$

Stąd

$$P_n(A_{n,p_j}^c) = \frac{\frac{s}{2}(s-1)}{\binom{n}{2}},$$

co po uproszczeniu daje

$$P_n(A_{n,p_j}^c) = \frac{s(s-1)}{n(n-2)}, \quad \text{skąd} \quad P_n(A_{n,p_j}) = 1 - \frac{s(s-1)}{n(n-2)}.$$

Porównamy teraz wyliczone prawdopodobieństwo zdarzenia A_{n,p_j} z iloczynem $\prod_{p_j \in \mathcal{P}_n} \left(1 - \frac{1}{p_j^2}\right)$. Można pokazać,²⁷ że obowiązuje oszacowanie

$$1 - \frac{1}{p_j^2} \leq P_n(A_{n,p_j}^c) \leq 1 - \left(\frac{1}{p_j^2}\right) \gamma_n(p_j),$$

co po przemnożeniu stronami dla kolejnych liczb pierwszych $p_j \in \mathcal{P}_n$ oznacza, że

$$\prod_{p_j \in \mathcal{P}_n} \left(1 - \frac{1}{p_j^2}\right) \leq \prod_{p_j \in \mathcal{P}_n} P_n(A_{n,p_j}^c) \leq \prod_{p_j \in \mathcal{P}_n} \left(1 - \frac{1}{p_j^2}\right) \prod_{p_j \in \mathcal{P}_n} \gamma_n(p_j),$$

gdzie ciąg $\prod_{p_j \in \mathcal{P}_n} \gamma_n(p_j)$ jest zbieżny do jedności.

Domyślamy się co wydarzy się teraz. Można udowodnić, że²⁸

$$P_n(A \cap \Omega_n) = P_n(A_n) = P_n\left(\bigcap_{p_j \in \mathcal{P}_n} A_{n,p_j}\right) = \prod_{p_j \in \mathcal{P}_n} P_n(A_{n,p_j}^c).$$

Ostatecznie pozwala to nam napisać następujące przybliżenie

$$P_n(A \cap \Omega_n) \approx \prod_{p_j \in \mathcal{P}_n} \left(1 - \frac{1}{p_j^2}\right).$$

Musimy sobie teraz przypomnieć wynik z podrozdziału 1.3, stwierdzający, że iloczyn $\prod_{p_j \in \mathcal{P}_n} \left(1 - \frac{1}{p_j^2}\right)$ zbieżny jest do $\frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2}$. W takim razie dostaniemy

$$P_n(A \cap \Omega_n) \approx \mathbf{p} = \frac{6}{\pi^2},$$

albo precyzyjniej

$$P_n(A \cap \Omega_n) \longrightarrow \mathbf{p} = \frac{6}{\pi^2}.$$

Przyznać trzeba, że wyniki ten jest zdumiewający z punktu widzenia obecności liczby π . Z drugiej strony należy też stwierdzić, że droga jaka do niego prowadzi wcale nie jest łatwa. Pominęliśmy przecież sporo szczegółów w przedstawionym rozumowaniu oraz skorzystaliśmy z wielu faktów. Taka jest właśnie matematyka!

²⁷Szczegóły tego elementarnego rachunku pominęliśmy. Czytelnika zachęcamy mimo wszystko do jego powtórzenia.

²⁸Wzór ten ma swoją interpretację probabilistyczną. Równość ta oznacza, że występujące w niej zdarzenia są *stochastycznie niezależne*.

3 Zakończenie

Zamiarem naszym było pokazanie, w miarę w przestępny sposób, podstawowych faktów związanych z liczbą π . Zależało nam na tym, aby w miarę zrobić to wszechstronnie, zarówno uwzględniając stronę merytoryczną zagadnienia jak i nie mniej ważny aspekt historyczny. Zdajemy sobie doskonale sprawę, że o wielu problemach nie napisaliśmy, że pominęliśmy inne ważne²⁹, wkład innych nie wymienionych tutaj uczonych. Jasne jest, że na czterdziestu paru stronach jest to niemożliwe. Oczywiście literatura przedmiotu związana bądź poświęcona omawianej tematyce jest bardzo obszerna. Czytelnika bardzo zachęcamy do dalszego studiowania. Mamy nadzieję, że artykuł ten spełni swoją rolę – po jego lekturze Czytelnik zauważy piękno matematyki oraz jej moc. Zrozumie, że jej studiowanie wymaga, owszem sporego zaangażowania i wysiłku intelektualnego, ale warto to robić. Zauważy też fenomen, który dobrze jest widoczny z perspektywy historii matematyki i nie tylko, polegający na tym, że byty kilkanastu ludzkich pokoleń potrafi połączyć produkt ludzkiego rozumu. Ta, nazwijmy ją, *zasada ciągłości* jest kluczowa dla Człowieka. Jest gwarancją, że wkład jednostki ma charakter ponad czasowy i z tego punktu widzenia jest uniwersalny.

Dlatego uznaliśmy, że tym największym winni jesteśmy pamięć, zamieszczając w ostatnim rozdziale coś w rodzaju galerii ich portretów. Czytelnika zachęcamy do lektury pozycji o charakterze historycznym cytowanych w tym artykule celem wzbogacenia wiedzy o naszych bohaterach.

²⁹Chociażby słynną *zasadę nieoznaczności* Heisenberga, czy też *równanie pola grawitacyjnego* ogólnej teorii względności Einsteina (patrz np. [15])

4 Galeria matematyków związanych z liczbą π



Rysunek 7: Euklides (365–300 BC)



Archimedes (287–212 BC)



Rysunek 8: G. Cardano (1501–1576)



L. van Ceulen (1540–1610)



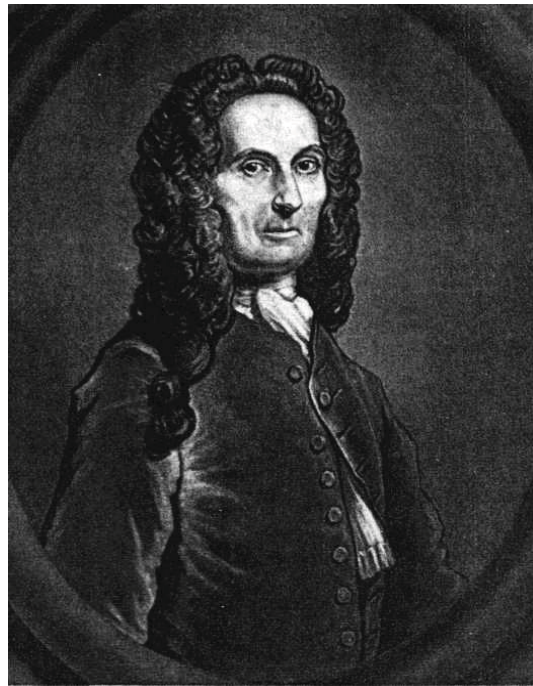
Rysunek 9: P. Fermat (1601–1665)

J.Wallis (1616–1703)



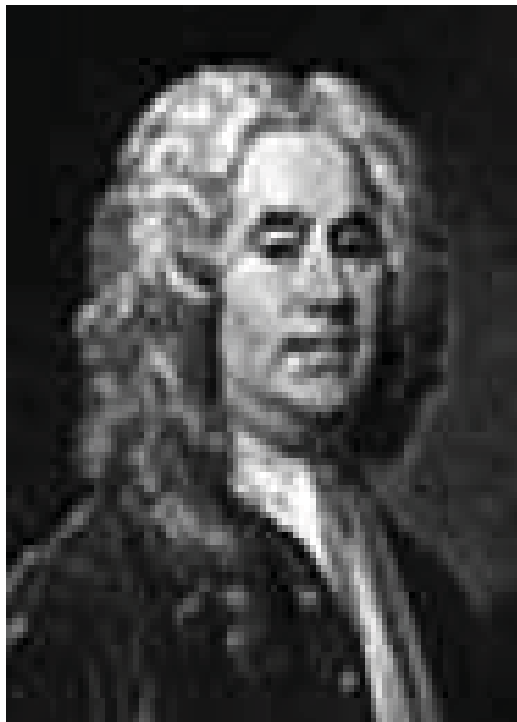
Rysunek 10: I. Newton (1643–1727)

G.W. Leibniz (1646–1716)



Rysunek 11: J. Bernoulli (1667–1748)

A. de Moivre (1667–1754)



Rysunek 12: W. Jones (1675–1749)

B. Taylor (1685–1731)



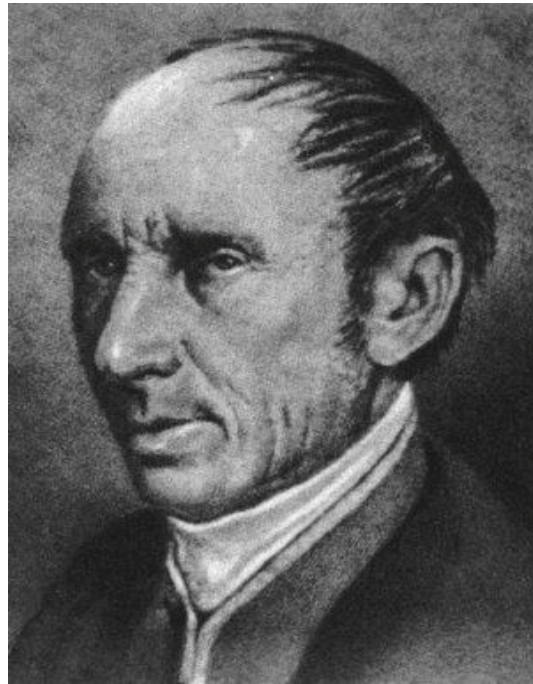
Rysunek 13: L. Euler (1707–1783)

J.H. Lambert (1728–1777)



Rysunek 14: P. Laplace (1749–1827)

J.B.J. Fourier (1768–1830)



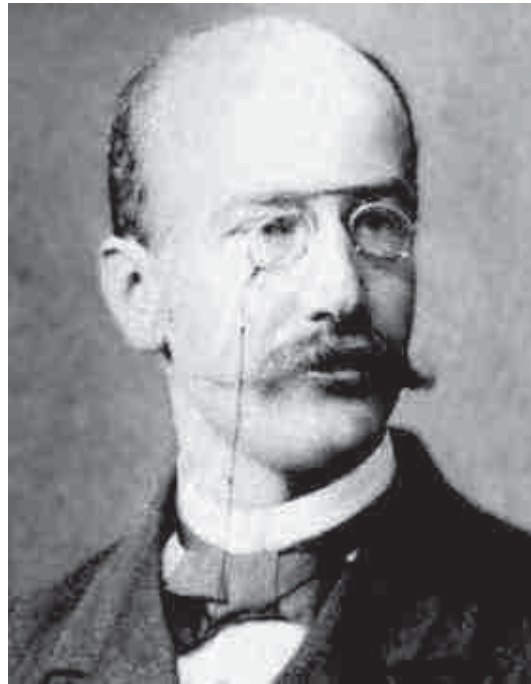
Rysunek 15: C.F. Gauss (1777–1855)

A.L. Cauchy (1789–1857)



Rysunek 16: W.R. Hamilton (1805–1865)

Ch. Hermite (1822–1901)



Rysunek 17: B. Riemann (1826–1866)

F. von Lindemann (1852–1939)



Rysunek 18: J. Hadamard (1865–1963)

S. Ramanujan (1887–1920)

Literatura

- [1] A.D. Aczel, *Wielkie twierdzenie Fermata, rozwiązanie zagadki starego matematycznego problemu*, Prószyński i S-ka, Warszawa 1998.
- [2] C. Boyer, *Historia rachunku różniczkowego i całkowego i rozwój jego pojęć*, PWN Warszawa 1964.
- [3] F. Cajori, *A history of Mathematics*, MacMillan and CO, 1894.
- [4] R. Courant, H. Robbins, *Co to jest MATEMATYKA*, PWN Warszawa 1962, wydanie drugie.
- [5] D. Downing, *Dictionary of Mathematics terms*, Third edition, Barrons's Educational Series, Inc. 1995.
- [6] W. Feller, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, PWN Warszawa 1969.
- [7] G.M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy tom II*, PWN Warszawa 1976, wydanie szóste.
- [8] D. Guedj, *Twierdzenie papugi*, Grupa Wydawnicza Bertelsmann Media, Warszawa 2001.
- [9] <http://mathworld.wolfram.com>, 28.09.2011.
- [10] U.C. Merzbach, C.B. Boyer, *A history of Mathematics*, Third edition, John Wiley & Sons, Inc., 2010.
- [11] R. Rębowski, *3,14–czyli imieniny liczby π* , Zeszyty Naukowe PWSZ im. Witelona w Legnicy, w przygotowaniu.
- [12] R. Rębowski, *Matematyka dyskretna dla informatyków*, Seria Wydawnicza Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej im. Witelona w Legnicy, 2009.
- [13] R. Rębowski, *Podstawy metod probabilistycznych*, Seria Wydawnicza Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej im. Witelona w Legnicy, 2006.
- [14] W. Sierpiński, *Wstęp do teorii liczb*, PZWSz, Warszawa 1965.
- [15] J. D. Stein, *Cosmic Numbers, The Numbers That Define Our UNIVERSE*, Basic Books, New York, 2011.
- [16] J. Tanton, *Encyclopedia of Mathematics*, Facts On File, Inc. 2005.
- [17] W. Weaver, *Elementarz rachunku prawdopodobieństwa*, Wiedza Powszechna, Warszawa 1970.
- [18] E. W. Weisstein, *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*, Second edition, van Nostrand Reinhold, New York 1989.