Skąd się biorą i jak należy rozumieć liczby zespolone

Ryszard Rębowski

27 października 2016

1 Wstęp

Zbiór liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$ ma ważną w zastosowaniach, dobrze znaną własność – każde dwie liczby rzeczywiste $r_1, r_2 \in \mathbf{R}$ można ze sobą porównać, bowiem[1]

$$\text{albo } r_1 = r_2, \text{ albo } r_1 < r_2, \text{ albo } r_2 < r_1.$$

Konsekwencją tej własności jest jego *liniowa* struktura znana jako *prosta rzeczywista* przedstawiana jak na rysunku 1.

Rysunek 1: ilustracja prostej rzeczywistej

Okazuje się, o czym przekonamy się dalej, że w strukturę tę wpisany jest poważny defekt, który dobrze opisany jest poniższym równaniem

$$x^2 + 1 = 0, \ x \in \mathbf{R}. \tag{1}$$

Równanie (1) nie ma rozwiązania w zbiorze $\mathbf{R}$, nie dlatego, że nie jest znana metoda jego rozwiązania, ale dlatego, że zbiór z którego to rozwiązanie ma pochodzić się jest za mały!

[1] Jest to znana zasada *trichotomii*.

Dalej pokżemy w jaki sposób ten defekt można wyeliminować. Doprowadzi to do nowej jakości, której poświęcone jest to opracowanie – pojęcia ciała algebraicznego.[2]

2 Ciało algebraiczne

Aby osiągnąć efekt powiększenia zbioru liczb rzeczywistych oraz korzyści wynikające z tego, na problem powiększenia zbioru **R** musimy spojrzeć z szerszej perspektywy. W przypadku zbioru **R** ważna jest nie tylko sama mnogość, ale i coś, co w matematyce nazywane jest *strukturą algebraiczną*. Na tę strukturę składają się:

1. dwa działania[3] oznaczane symbolami „+” oraz „·” ze swoimi własnościami,
2. dwie wyróżnione liczby: 0 i 1,

co przedstawiono w tabeli 1.

własność	$+$	$\cdot$
przemienność	$a+b=b+a$	$ab=ba$
łączność	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(ab)c=a(bc)$
przeciwność	$a+b=0 \Leftrightarrow b=-a$ b jako przeciwny do a	
odwrotność		$ab=1 \Leftrightarrow b=a^{-1}$ b jako odwrotny do $a \neq 0$

Tablica 1: Własności działań

Biorąc teraz $(\mathbf{R}, +, \cdot, 0, 1)$ jako całość, o własnościach przedstawionych w tabeli 1, wraz z własnością *rozdzielania* działania „·” względem „+”, mówimy, że mamy do czynienia ze *strukturą algebraiczną* typo *ciało,* dokładniej, jest to *ciało liczb rzeczywistych.*

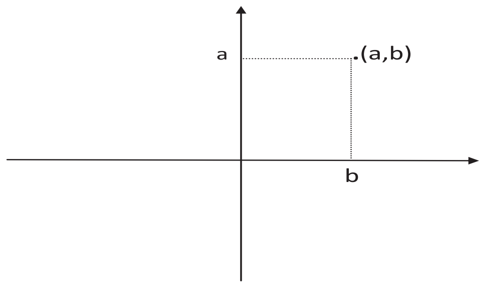
[2]Równanie (1) nie było jedyną przyczyną poszukiwań możliwości rozszerzenia zbioru liczb rzeczywistych. Pierwsze próby jego rozwiązania przy użyciu nowych liczb, zwanych wtedy „fikcyjnymi” zapoczątkowane zostały jeszcze w XVI wieku przez włoskiego matematyka Girolamo Cardano. Potrzeba ich znajomości w sposób nieoczekiwany pojawiła się w pracach „ojca” silnika spalinowego Nicolasa Léonarda Sadi Carnota (1796-1832) – twórcy podstaw współczesnej termodynamiki. Carnot zauważył, że jeśli w obliczeniach na chwilę przyjmie, że liczba $\sqrt{-1}$ istnieje, to przeprowadzone przez niego obliczenia upraszczają się, i co najważniejsze dają poprawny wynik. Formalna definicja podana w tym opracowaniu należy do Williama Rowana Hamiltona (1805-1865) i Carla Friedrich Gaussa (1777-1855). Współcześnie liczby zespolone mają szerokie zastosowania w fizyce czy w technice (np. w elektrotechnice). W dalszym ciągu są bardzo ważne dla współczesnej matematyki.

[3]Nazywane arytmetycznymi.

3 Ciało liczb zespolonych

Skonstruujemy teraz *nowe ciało algebraiczne*, według zasady $(X, \oplus, \odot, \mathbf{0}, \mathbf{1})$, gdzie X będzie *nowym zbiorem*, na którym zdefiniowane zostaną *nowe działania* $\oplus, \odot$ będące odpowiednikami dotychczasowych $+, \cdot$, z wyróżnionymi *nowymi elementami* zbioru X – *nowym zerem* $\mathbf{0}$ i *nową jedynką* $\mathbf{1}$.

Bierzemy $X = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, czyli zbiór wszystkich *uporządkowanych par* postaci (a, b) dla $a, b \in \mathbf{R}$. Z geometrycznego punktu widzenia jest to zbiór wszystkich punktów P płaszczyzny, które w ustalonym układzie współrzędnych identyfikowane są przez swoje współrzędne, co przedstawiono na rysunku 2.



Rysunek 2: płaszczyzna zespolona

Przyjmujemy, że $\mathbf{0} = (0, 0)$ oraz $\mathbf{1} = (1, 0)$. Działania $\oplus, \odot$ definiujemy następująco: dla $(a, b),\ (a^{'}, b^{'}) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$,

$$(a, b) \oplus (a^{'}, b^{'}) = (a + a^{'}, b + b^{'}), \quad (a, b) \odot (a^{'}, b^{'}) = (aa^{'} - bb^{'}, ab^{'} + a^{'}b). \qquad (2)$$

Nietrudno jest sprawdzić, że oba zdefiniowane w (2) działania spełniają wszystkie własności przedstawione w tabeli 1. Prowadzi to do następującego stwierdzenia.

Twierdzenie 1
$(\mathbf{R} \times \mathbf{R}, \oplus, \odot, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ *jest ciałem algebraicznym.*

Dalej ciało to będziemy oznaczali krótko przez $\mathbf{C}$ i nazywali *ciałem liczb zespolonych.*

Przykład 1
Wyznaczyć liczbę odwrotną do $z = (1, 1)$.

Rozwiązanie. Ponieważ $z \neq \mathbf{0} = (0, 0)$, z własności ciała $\mathbf{C}$ istnieje liczba zespolona w, która jest odwrotna do z. Jako taka spełnia warunek $wz = \mathbf{1} = (1, 0)$.

Niech $w = (x, y)$, gdzie x, y są szukanymi liczbami rzeczywistymi. Wtedy z definicji mnożenia dostaniemy

$$wz = (x, y) \odot (1, 1) = (x - y, x + y) = (1, 0) \Leftrightarrow x - y = 1 \text{ oraz } x + y = 0.$$

Ponieważ wtedy $y = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$, liczba odwrotna do z, $w = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

Przykład 2 *Obliczyć iloczyn liczby* $(0, 1)$ *przez siebie.*

Rozwiązanie. Z definicji mnożenia

$$(0, 1) \odot (0, 1) = (-1, 0). \tag{3}$$

Zatrzymamy się na chwilę na ostatnim wyniku. Aby właściwie go zinterpretować, musimy zauważyć pewien dodatkowy fakt. W tym celu spójrzmy jeszcze raz na rysunek 2. Każdy punkt znajdujący się na osi poziomej możemy zinterpretować na dwa sposoby: jako liczbę $r \in \mathbf{R}$, ale też jako punkt płaszczyzny, czyli $(r, 0)$. Dalej, zauważmy, że liczby zespolone postaci $(r, 0)$, jako podzbiór $\mathbf{C}$ stanowią układ zamknięty: ich suma jak i iloczyn dalej mają taką postać. Co więcej, dodawanie i mnożenie po stronie ciała $\mathbf{R}$ bezpośrednio przekłada się na dodawanie i mnożenie po stronie ciała $\mathbf{C}$ z zachowaniem wszystkich własności podanych w tabeli 1. Na przykład, dla liczb $r_1, r_2 \in \mathbf{R}$ ich suma $r_1 + r_2$ bierze się się z sumy $(r_1, 0) \oplus (r_2, 0)$, która jest równa $(r_1 + r_2, 0)$ i na odwrót. Podobnie jest z mnożeniem. Wreszcie mamy odpowiedniość dla wyróżnionych liczb $0, 1$ po stronie $\mathbf{R}$ oraz $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$ po stronie $\mathbf{C}$:

$$0 \to \mathbf{0} = (0, 0), \quad 1 \to \mathbf{1} = (1, 0).$$

Z tego powodu mówimy, że ciało $\mathbf{C}$ jest powiększeniem ciała $\mathbf{R}$.[4] Dlatego też dalej, ze względu na odpowiedniość $r \to (r, 0)$ będziemy pisali na przykład 5 oraz mówili, że „jest to liczba zespolona pięć”, czyli $(5, 0)$. Prowadzi to do następującego wniosku.

Wniosek 1
Z algebraicznego punktu widzenia mamy efekt zanurzenia ciała $\mathbf{R}$ *w ciele* $\mathbf{C}$. *W tym sensie mówimy, że ciało liczb zespolonych jest rozszerzeniem ciała liczb rzeczywistych. Co więcej, pozwala to stosować uproszczoną notację dla liczb zespolonych postaci* $(r, 0)$, *jako* r.

Wróćmy do równości (3). Oznaczając w niej liczbę $(0, 1)$ przez $\mathbf{i}$, równość ta, zgodnie z przyjętymi wyżej ustaleniami będzie miała postać

$$\mathbf{i} \odot \mathbf{i} = \mathbf{i}^2 = -1,$$

co oznacza, że w ciele liczb zespolonych odpowiednik zespolony równania rzeczywistego $x^2 + 1 = 0$, równanie $z^2 \oplus 1 = 0$ ma co najmniej jedno rozwiązanie – jest nim liczba zespolona $\mathbf{i}$. Oznacza to, że ciało liczb zespolonych spełniło stawiane przed nim oczekiwanie.

[4] Lepiej jest powiedzieć, że ciało $\mathbf{R}$ jest *zanużone* w ciele $\mathbf{C}$.

4 Postać algebraiczna

Obowiązujący do tej pory format zapisu liczby zespolonej w postaci pary uporządkowanej nazywa się jej *postacią kanoniczną*. Nie podlega dyskusji spostrzeżenie, że jest on niewygodny, szczególnie kiedy wykonujemy działania na liczbach zespolonych. Pokażemy w jaki sposób zapis ten można uprościć, przynajmniej z punktu widzenia dodawania. Zauważmy wpierw, że dla $z = (a, b)$ możemy napisać:

$$z = (a, b) = (a, 0) \oplus (0, b) = (a, 0) \oplus (b, 0) \odot \mathbf{i}, \text{ gdzie } \mathbf{i} = (0, 1).$$

Powyższa reprezentacja liczby zespolonej pokazuje, że do dwóch wybranych wcześniej liczb zespolonych $\mathbf{0}$ oraz $\mathbf{1}$ należy dołączyć trzecią, czyli $\mathbf{i} = (0, 1)$, nazywaną *jednością urojoną*.[5] Stosując teraz zasadę uproszczonego zapisu wprowadzoną w poprzednim rozdziale, ostatnią równość możemy zapisać prościej:

$$z = a \oplus b \odot \mathbf{i},$$

albo po prostu jako

$$z = a + b \cdot \mathbf{i},$$

nazywając „+" *dodawaniem zespolonym*, „·" *mnożeniem zespolonym*. Ostatecznie przyjęła się następująca forma nazywana *postacią algebraiczną* liczby zespolonej:

$$z = a + b\mathbf{i}. \tag{4}$$

Mamy zatem kolejne stwierdzenie.

Fakt 1
Każda liczba zespolona $z = (a, b)$ ma dokładnie jedną postać algebraiczną $a + b\mathbf{i}$. Na odwrót, postaci algebraicznej $a+b\mathbf{i}$ odpowiada dokładnie jedna liczba zespolona, co zapisujemy symbolicznie

$$(a, b) = a + b\mathbf{i}.$$

W takim razie liczba zespolona $\mathbf{1} = (1, 0)$ w postaci algebraicznej ma postać $1 + 0\mathbf{i}$, ale piszemy 1, podobnie dla $\mathbf{0} = (0, 0)$ mamy $0 + 0\mathbf{i}$ pisząc 0, dla $\mathbf{i} = (0, 1)$ mamy $0 + 1\mathbf{i}$, a piszemy $\mathbf{i}$. Natomiast na przykład zapis $2 - 3\mathbf{i}$ oznacza, że mamy $2 + (-3)\mathbf{i}$, czyli liczbę $(2, -3)$.

Czas na najważniejsze, uzasadnienie nazwy tej postaci. Dla dowolnych liczb rzeczywistych c, d oraz symbolu x rozważmy wyrażenie $a+bx$. W algebrze przyjęło się nazywać je *wyrażeniem algebraicznym*. Czym jest takie wyrażenie? Przede wszystkim patrzymy na nie jako na jeden obiekt, nie wyróżniając w nim żadnego z użytych symboli. Po drugie, jeśli symbol x nie ma znaczenia liczbowego, nie jest ono liczbą, jest obiektem o znaczeniu abstrakcyjnym. A pomimo tego na tak

[5] Nazwę tę zaproponował Gauss od *imaginarius* (z łac. znaczy *zmyślony*).

zdefiniowanych obiektach można uprawiać arytmetykę, co robi się już w szkole. Dobrze wiadomo, że

$$(c + dx) + (c' + d'x) = (c + c') + (d + d')x,$$

co oznacza, że *sumą wyrażeń algebraicznych* jest wyrażenie algebraiczne. W przypadku *iloczynu* sytuacja nieco komplikuje się, bowiem możemy co najwyżej napisać, że

$$(c + dx) \cdot (c' + d'x) = cc' + (cd' + dc')x + dd'x^2, \text{ gdzie } x \cdot x \text{ zapisaliśmy jako } x^2.$$

Widzimy teraz, że postać algebraiczna liczby zespolonej jest wartością wyrażenia algebraicznego dla $x = \mathbf{i}$. Co więcej zasada dodawania wyrażeń algebraicznych jest identyczna z treścią definicji dodawania liczb zespolonych. Ponieważ $\mathbf{i}^2 = -1$, ostatnia równość odnosząca się do mnożenia wyrażeń algebraicznych oznacza, że po podstawieniu $x = \mathbf{i}$ dostaniemy:

$$(c + d\mathbf{i}) \cdot (c' + d'\mathbf{i}) = (cc' - dd') + (cd' + c'd)\mathbf{i},$$

co daje zasadę mnożenia liczb zespolonych.

Ostatnie związki pomiędzy działaniami na wyrażeniach algebraicznych, a działaniami na liczbach zespolonych w postaci algebraicznej, stanowią o największej zalecie postaci algebraicznej i dlatego jest ona ważna w zastosowaniach.

Dalej przyjmiemy pewne oznaczenia: dla $z = (a, b) = a + b\mathbf{i}$, będziemy pisali $a = \mathfrak{Re} z$, $b = \mathfrak{Im} z$ i czytali odpowiednio *część rzeczywista* i *część urojona* liczby z. Każdą z osi z rysunku 2 oznaczymy też jako: poziomą $\mathfrak{Re}$ – *oś rzeczywista* oraz pionową $\mathfrak{Im}$ – *oś urojona.*

Z Faktu 1 wynika bardzo przydatna zasada – *zasada porównywania liczb zespolonych* (ZPLZ), której treść podajemy poniżej.

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \mathfrak{Re} z_1 = \mathfrak{Re} z_2 \text{ oraz } \mathfrak{Im} z_1 = \mathfrak{Im} z_2,$$

a więc części rzeczywiste i urojone porównywanych liczb muszą być sobie równe. Zilustrujemy to kolejnym przykładem.

Przykład 3 *W ciele* $\mathbf{C}$ *rozwiązać równanie* $z^2 + 1 = 0.$

Rozwiązanie. Poszukujemy liczb zespolonych z, danych w postaci algebraicznej oraz spełniających powyższe równanie. Dlatego przyjmiemy, że $z = x + y\mathbf{i}$, gdzie x, y są poszukiwanymi liczbami rzeczywistymi. Ale wtedy z założenia

$$(x + y\mathbf{i})^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - y^2 + 1) + 2xy\mathbf{i} = 0 + 0\mathbf{i}.$$

Dlatego na mocy ZPLZ liczby x, y muszą spełniać warunki:

$$x^2 - y^2 + 1 = 0, \; 2xy = 0.$$

Metodą elementarną taki układ można rozwiązać, skąd dostajemy dwa rozwiązania $(0, -1), (0, 1)$. Oznacza to, że rozważane równanie ma dokładnie dwa rozwiązania $\{-\mathbf{i}, \mathbf{i}\}$.

5 Inne działania w C

To, że ciało **C** powstało w pewnym sensie z powiększenia ciała **R** (pamiętamy o zjawisku zanurzenia) stanowi o „bogactwie” **C**. Widać to bardzo dobrze z powyższego przykładu (rozwiązanie w **R** nie istnieje). Zobaczymy to również przy okazji omawiania pewnego dodatkowego działania – *sprzężenia*.

Dla $z \in \mathbf{C}$, symbolem $\overline{z}$ oznaczymy taką liczbę zespoloną, że

$$\mathfrak{Re}(\overline{z}) = \mathfrak{Re} z \text{ oraz } \mathfrak{Im}(\overline{z}) = -\mathfrak{Im} z.$$

Wtedy liczbę $\overline{z}$ będziemy nazywali *liczbą sprzężoną* do z. Na przykład:

$$\overline{1} = 1, \ \overline{\mathbf{i}} = -\mathbf{i}, \ \overline{1+\mathbf{i}} = 1 + (-1)\mathbf{i}.$$

Zauważmy, że z ZPLZ wynika, że

$$z = \overline{z} \Leftrightarrow \mathfrak{Im} z = -\mathfrak{Im} z,$$

czyli $\mathfrak{Im} z = 0$. To właśnie z tego powodu w ciele **R** działanie to nie jest ”widoczne” – ciało to jest zbyt „ubogie”.

Wprost z definicji operacji sprzężenia wynikają kolejne własności:

$$\overline{\overline{z}} = z, \ \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \ \overline{z_1 z_2} = (\overline{z_1})(\overline{z_2}). \tag{5}$$

W szczególności dla $z = a + b\mathbf{i}$ dostaniemy

$$z\overline{z} = (a + b\mathbf{i})(a + (-b)\mathbf{i}) = a^2 + b^2. \tag{6}$$

Wzór (6) prowadzi do definicji kolejnego działania – *modułu* liczby zespolonej $|z|$, gdzie z definicji[6] $|z|^2 = a^2 + b^2$. Z podstaw geometrii płaszczyzny Czytelnik powinien wiedzieć, że liczba $\sqrt{a^2 + b^2}$ jest miarą odległości dwóch punktów $(0, 0)$ oraz (a, b) na płaszczyźnie. Z tego powodu uzupełnimy dotychczasową interpretację geometryczną liczby zespolonej o stwierdzenie, że będzie nią *wektor* zaczepiony w punkcie $(0, 0)$ o końcu w punkcie $z = (a, b) = a + b\mathbf{i}$ jak przedstawiono to na rysunku 3.

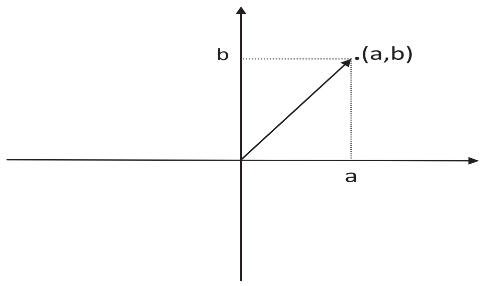
Wtedy miarą długości tego wektora jest moduł liczby z, czyli $|z|$. Ponieważ liczby zespolone $-z$ oraz $\overline{z}$ powstają w wyniku symetrii punktowej i osiowej, a te przekształcenia płaszczyzny zachowują odległość, mamy równość $|-z| = |z| = |\overline{z}|$.

Podobnie jak w przypadku arytmetki w ciele **R**, z działaniami „+” i „·” możemy stowarzyszyć odpowiadające im działania: „−” oraz „:” zwane odpowiednio *odejmowaniem zespolonym* i *dzieleniem zespolonym*. Dokładniej, z definicji przyjmujemy, że:

$$z_1 - z_2 \stackrel{\text{def}}{=} z_1 + (-z_2), \ (\text{gdzie } -z_2 \text{ oznacza l. przeciwną do } z_2,)$$

$$z_1 : z_2 \stackrel{def}{=} z_1 z_2^{-1}, \ (\text{gdzie } z_2^{-1} \text{ oznacza l. odwrotną do } z_2 \neq 0.)$$

[6]Można też pisać $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.



Rysunek 3: wektorowa interpretacja liczby zespolonej

Przykład 4
Podzielić 1 *przez liczbę* **i***.*

Rozwiązanie. Wynikiem działania będzie liczba odwrotna do **i**. Szukamy zatem takiej liczby zespolonej, powiedzmy w, że $w\mathbf{i} = 1$. Znajdziemy ją w postaci algebraicznej $w = x + y\mathbf{i}$ dla pewnych rzeczywistych x, y. Ponieważ

$$(x + y\mathbf{i})\mathbf{i} = 1 \Leftrightarrow -y + x\mathbf{i} = 1 \Leftrightarrow -y = 1 \text{ oraz } x = 0,$$

widzimy, że $x = 0,\ y = -1$, czyli $\mathbf{i}^{-1} = -\mathbf{i}$.

Z przebiegu ostatniego rachunku widać, że zaprezentowana metoda dzielenia liczb zespolonych odwołująca się bezpośrednio do definicji jest uciążliwa. Warto ją uprościć, co uczynimy poniżej. Przede wszystkim należy zauważyć, że podobnie jak w przypadku rzeczywistym, działanie dzielenia zespolonego ma własność ułamka, czyli podlega zasadzie *rozszerzenia-skracania,* co oznacza, że

$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 w}{z_2 w}, \text{ o ile } z_2 w \neq 0.$$

W szczególności możemy napisać

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}.$$

Ale $|z_2|^2$ jest liczbą zespoloną o części rzeczywistej równej zero, dlatego

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{\mathfrak{Re}(z_1\overline{z_2})}{|z_2|^2} + \frac{\mathfrak{Im}(z_1\overline{z_2})}{|z_2|^2}\mathbf{i}.$$

Przykład 5
Wykonć dzielenie $\frac{1+2\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}}$.

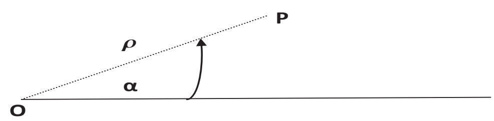
Rozwiązanie. Zgodnie z powyższą zasadą możemy napisać:

$$\frac{1+2\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}} = \frac{(1+2\mathbf{i})(1+\mathbf{i})}{|1-\mathbf{i}|^2} = \frac{-1+3\mathbf{i}}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}\mathbf{i} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}.$$

Niestety, ale postać algebraiczna liczby zespolonej nie jest bez wad. Ujawniają się one przy okazji wykonywania mnożenia i jego pochodnych: potęgowania, czy pierwiastkowania. Oznacza to, że warto szukać bardziej adekwatnej do wymienionych przed chwilą sytuacji postaci. Oczywiście taka istnieje – jest nią *postać trygonometryczna*, a w efekcie, po jej drobnej modyfikacji, *postać wykładnicza*.

6 Postać trygonometryczna

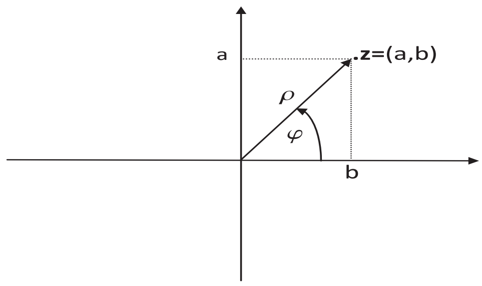
Zaczniemy od podania podstawowych faktów związanych z pewnym nowym układem odniesienia. W przypadku postaci algebraicznej wykorzystywaliśmy pojęcie tzw. *układu współrzędnych kartezjańskich*. Punkty na płaszczyźnie można opisywać przy użyciu innego układu. Wykorzystamy do tego celu tzw. *układ współrzędnych biegunowych*. Układ ten przedstawiony został na rysunku 4.



Rysunek 4: punkt w układzie współrzędnych biegunowych

Układ współrzędnych biegunowych składa się z ustalonego punktu, np. O oraz półprostej o początku w tym punkcie. Położenie dowolnego punktu $P \neq O$ opisuje się parą liczb: ρ – długością odcinka o końcach w punktach O, P, zatem $\rho > 0$ oraz miarą *kąta skierowanego*, gdzie $0 \leqslant \alpha < 2\pi$.[7] Weźmy teraz płaszczyznę zespoloną i nanieśmy na nią układ współrzędnych biegunowych, jak przedstawiono to na rysunku 5.

[7] Kąt taki odmierzany jest od półprostej w kierunku przeciwnym do wskazówek zegara. Mówimy wtedy, że ma orientację dodatnią i $\alpha \geqslant 0$. Zmiana kierunku odmierzania daje orientację przeciwną, co oznacza, że miara jego wynosi $-\alpha$.



Rysunek 5: liczba zespolona w układzie biegunowym

Wtedy liczbę $z = (a, b) = a + b\mathbf{i}$ możemy wyreprezentować za pomocą pary liczb (ρ, φ), gdzie $\rho = |z|$, a φ jest kątem skierowany o mierze $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Prowadzi to do następujących stwierdzeń:

1. każdej liczbie zespolonej $z = a + b\mathbf{i},\ z \neq 0$ można przyporządkować dokładnie jedną parę liczb (ϱ, φ), gdzie $\varrho > 0,\ \varphi \in [0, 2\pi)$,

2.

   wtedy $\varrho = |z|,\ \varphi = argz$ – nazywamy *argumentem głównym* liczby z,

3. dla argumentu głównego φ liczby zespolonej z definiujemy *zbiór argumentów* liczby zespolonej $Argz$, gdzie

$$Argz = \{\alpha \in \mathbf{R} \colon\ \alpha = \varphi + 2k\pi\ \ k \in \mathbf{Z}\},$$

   gdzie $\mathbf{Z}$ oznacza zbiór liczb całkowitych. Wtedy dla każdej wartości kąta $\alpha \in Argz$, (ϱ, φ) oraz (ϱ, α) reprezentują tę samą liczbę zespoloną (ten sam punkt na płaszczyźnie zespolonej),

4. pojęcia: modułu, argumentu głównego oraz zbioru argumentów pozwalają zapisać każdą liczbę zespoloną $z = a + b\mathbf{i},\ z \neq 0$ w tzw. *postaci trygonometrycznej*, czyli

$$z = a + b\mathbf{i} = \varrho(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi) = \varrho(\cos\alpha + \mathbf{i}\sin\alpha),\ \text{gdzie}\ \alpha \in Argz,$$

   co jest prostą konsekwencją trygonometrii,

5. na odwrót, mając postać trygonometryczną liczby zespolonej, czytając powyższy wzór *z prawej na lewą*, otrzymamy jej postać algebraiczną,

6. dla postaci trygonometrycznej obowiązuje następująca *zasada porównywania liczb*: niech dane będą dwie liczby zespolone

   $z_1 = \varrho_1(\cos\alpha_1 + \mathbf{i}\sin\alpha_1), z_2 = \varrho_2(\cos\alpha_2 + \mathbf{i}\sin\alpha_2)$, gdzie $\alpha_1 \in Argz_1, \alpha_2 \in Argz_2$.

   Wtedy

   $z_1 = z_2 \;\Leftrightarrow\; \varrho_1 = \varrho_2$ oraz $\alpha_1 - \alpha_2 = 2k\pi$ dla pewnej całkowitej wartości k.

6.1 Własności postaci trygonometrycznej

Zaczniemy od prostego przykładu pokazującego różnicą pomiędzy pojęciami $argz$ i $Argz$

Przykład 6
Znaleźć postać trygonometryczną liczby $-\mathbf{i}$.

Rozwiązanie. Ponieważ $|-\mathbf{i}| = 1$ oraz $arg(-\mathbf{i}) = \frac{3}{2}\pi$, możemy napisać

$$\mathbf{i} = 1\Big(\cos\frac{3}{2}\pi + \mathbf{i}\sin\frac{3}{2}\pi\Big).$$

Z drugiej strony, jednym z argumentów α liczby $-\mathbf{i}$ jest wartość $-\frac{\pi}{2} \in Arg(-\mathbf{i})$, dlatego

$$\mathbf{i} = 1\Big(\cos(-\frac{\pi}{2}) + \mathbf{i}\sin(-\frac{\pi}{2})\Big).$$

Zauważmy, że (zgodnie z zasadą porównywania) mamy

$$\varphi - \alpha = \frac{3}{2}\pi - (-\frac{\pi}{2}) = 2\pi.$$

Kolejny przykład pokazuje, że przy identyfikacji postaci trygonometrycznej należy mieć się na baczności!

Przykład 7
Dane jest wyrażenie $-\cos\beta + \mathbf{i}\sin\beta$, *gdzie* $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$. *Czy jest to postać trygonometryczna liczby zespolonej?*

Rozwiązanie. Przyjmuąc $z = -\cos\beta + \mathbf{i}\sin\beta$, mamy $Rez = -\cos\beta$, $Imz = \sin\beta$, co oznacza, że na pewno mamy do czynienia z liczbą zespoloną daną w postaci algebraicznej. Jej postać trygonometryczna (istnieje, bowiem $z \neq 0$) musi wyglądać następująco

$$z = |z|\Big(\cos\alpha + \mathbf{i}\sin\alpha\Big), \text{ gdzie } \alpha \text{ jest jednym z argumentów } z.$$

Ponieważ z trygonometrii $|z| = 1$, oznacza to, że wartość α musi być taka, że

$$-\cos\beta + \mathbf{i}\sin\beta = \cos\alpha + \mathbf{i}\sin\alpha,$$

i z tego powodu wyrażenie to nie jest postacią trygonometryczną ($\beta \neq \frac{\pi}{2}$ nie jest argumentem). Aby ją wyznaczyć należy znaleźć wartość α. Jest to podstawowe zadanie z trygonometrii, co zostawiamy Czytelnikowi.

6.2 Zasada mnożenia

Wprowadzając pojęcie postaci trygonometrycznej wyraźnie zaakcentowaliśmy jedną kwestię – ma ona służyć uproszczeniu działania mnożenia, a więc potęgowania oraz dzielenia. Niech $z = z_1 z_2$, gdzie obie liczby z_1, z_2 są różne od zera. Wtedy $z \neq 0$ i dlatego możemy zapisać

$$z = |z|\Big(\cos\alpha + \mathbf{i}\sin\alpha\Big), \text{ gdzie } \alpha \in Arg z.$$

Z własności modułu wiemy, że $|z| = |z_1 z_2| = |z_1||z_2|$. Pozostaje nam wyznaczyć tylko wartość argumentu. Z zasad trygonometrii wynika (szczegóły rachunku pomijamy), że wtedy

$$arg z_1 + arg z_2 \in Arg z,$$

co pozwala nam napisać treść *zasady mnożenia.*

Fakt 2 *(Zasada Mnożenia)*
Dla dowolnych różnych od zera liczb zespolonych z_1, z_2 mamy

$$z_1 z_2 = |z_1|\Big(\cos\alpha_1 + \mathbf{i}\sin\alpha_1\Big)|z_2|\Big(\cos\alpha_2 + \mathbf{i}\sin\alpha_2\Big) =$$

$$= |z_1||z_2|\Big(\cos(\alpha_1+\alpha_2) + \mathbf{i}\sin(\alpha_1+\alpha_2)\Big).$$

Uwaga 1
W tym miejscu należy wyraźnie podkreślić, że z powyżej zasady nie wynika, że zawsze

$$arg(z_1 z_2) = arg z_1 + arg z_2,$$

bowiem miara kąta po prawej stronie powyższej równości może być większa od 2π! Dlatego powyższa równość wymaga korekty (patrz zadanie na końcu dokumentu),

$$arg(z_1 z_2) = arg z_1 + arg z_2 + 2k\pi, \text{ dla pewnej całkowitej wartości } k.$$

Z *zasady mnożenia* łatwo wyprowadzić kolejną zasadę - *zasadę potęgowania.*

Fakt 3 *(Zasada Potęgowania)*
Niech $w = z^n$ dla $n \geqslant 2$, $z \neq 0$. Wtedy $|w| = |z|^n$ oraz $n\alpha \in Arg w$ dla każdego $\alpha \in Arg z$, co oznacza, że

$$\Big[|z|\Big(\cos\alpha + \mathbf{i}\sin\alpha\Big)\Big]^n = |z|^n\Big(\cos(n\alpha) + \mathbf{i}\sin(n\alpha)\Big).$$

Ostatni wzór w literaturze przedmiotu nosi nazwę *wzoru de Moivre'a.*

Przykład 8
Obliczyć $(1+\mathbf{i})^{2015}$.

Rozwiązanie. Oczywiście można spróbować rachunku bezpośredniego - szczerze nie polecam tego! Tymczasem ze wzoru de Moivre'a wynika, że

$$(1+\mathbf{i})^{2015} = (\sqrt{2})^{2015}\Big(\cos 2015\frac{\pi}{4} + \mathbf{i}\sin 2015\frac{\pi}{4}\Big),$$

co po prostych przekształceniach (proszę to zrobić!) daje

$$(1+\mathbf{i})^{2015} = -2^{2013/2} + 2^{2013/2}\mathbf{i}.$$

Przykład 9
Obliczyć $w = (2\sqrt{3} - 2\mathbf{i})^{30}$.

Rozwiązanie. Zauważmy, że $w = 2^{30}(\sqrt{3} - \mathbf{i})^{30}$. Oznaczmy przez $w_o = \sqrt{3} - \mathbf{i}$. Zamieniając w_o na postać trygonometryczną (uzasadnić to!) otrzymamy

$$w_o = 2\Big(\cos\frac{11}{6}\pi + \mathbf{i}\sin\frac{11}{6}\pi\Big),$$

dlatego ze wzoru de Moivre'a dostaniemy (proszę sprawdzić szczegóły rachunku!)

$$w = 2^{30}2^{30}\Big(\cos\frac{11}{6}30\pi + \mathbf{i}\sin\frac{11}{6}30\pi\Big) = 2^{60}\Big(\cos\pi + \mathbf{i}\sin\pi\Big) = -2^{60}.$$

6.3 Zasada sprzężenia, odwracania, dzielenia

Z interpretacji geometrycznej operacji sprzężenia liczby zespolonej z (różnej od zera) wynika, że $-arg z \in Arg\bar{z}$. Ponieważ dla modułu mamy $|\bar{z}| = |z|$, mamy kolejną zasadę.

Fakt 4 *(Zasada Sprzężenia)*

$$\bar{z} = |z|\Big(\cos(-\varphi) + \mathbf{i}\sin(-\varphi)\Big), \ \textit{gdzie}\ \varphi = arg z.$$

Zajmiemy się teraz przypadkiem liczby odwrotnej. Z zasady dzielenia wiemy, że

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}, \text{ o ile } z \neq 0,$$

skąd wynika, że (dlaczego?) $|z^{-1}| = \frac{1}{|z|}$. Ponadto z powyższego wzoru $-arg z \in Arg(z^{-1})$. Łącząc ostanie dwie uwagi otrzymamy:

Fakt 5 *(Zasada Odwracania)*

$$z^{-1} = |z|^{-1}\Big(\cos(-\varphi) + \mathbf{i}\sin(-\varphi)\Big), \ \textit{gdzie}\ \varphi = arg z.$$

Ostatni Fakt zilustrujemy przykładem.

Przykład 10
Obliczyć liczbę odwrotną do $z = 1 + \mathbf{i}$.

Rozwiązanie. Metodę bezpośrednią – wykorzystanie postaci algebraicznej zostawiamy Czytelnikowi. My posłużymy się *zasadą odwracania.* Ponieważ $|z| = \sqrt{2}$ oraz $arg z = \frac{\pi}{4}$, z ostatniego wzoru otrzymamy (uzasadnić szczegóły!)

$$(1+\mathbf{i})^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\Big(\cos\big(\frac{\pi}{4}\big) - \mathbf{i}\sin\big(\frac{\pi}{4}\big)\Big) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathbf{i}.$$

Zauważmy, że $(1+\mathbf{i})(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathbf{i}) = 1$, co potwierdza poprawność otrzymanego wyniku.

Niech wreszcie dane będą liczby z_1, z_2, gdzie $z_2 \neq 0$. Jak wiem, wtedy $z_1 : z_2 = z_1 z_2^{-1}$. Dlatego z *zasady mnożenia* i *zasady odwracania* oraz uwagi, że $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ otrzymamy kolejną zasadę.

Fakt 6 *(Zasada Dzielenia)*
Dla dowolnych liczb zespolonych $z_1, z_2,\ z_2 \neq 0$ *mamy*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\Big(\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + \mathbf{i}\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\Big).$$

Przykład 11
Obliczyć $z = \frac{1+\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}}$.

Rozwiązanie. Ponieważ

$$|z| = 1,\ \frac{\pi}{4} = arg(1+\mathbf{i}),\ -\frac{\pi}{4} \in Arg(1-\mathbf{i}),$$

z *zasady dzielenia* dostaniemy $z = \cos\frac{\pi}{2} + \mathbf{i}\sin\frac{\pi}{2} = \mathbf{i}$, co łatwo potwierdzić (jak?).

6.4 Inne przykłady

Pokażemy teraz przykłady, które jeszcze raz podkreślą zalety postaci trygonometrycznej.

Przykład 12
Rozwiązać równanie $arg z = \frac{5}{4}\pi$.

Rozwiązanie. Jeśli przez A oznaczymy zbiór rozwiązań powyższego równania, to zauważmy (z interpretacji argumentu głównego), że warunek $z \in A$ oznacza dokładnie, że:

1. moduł takiej liczby jest dowolną liczbą dodatnią (dlaczego?);

2. każda taka liczba leży na półprostej nachylonej do osi rzeczywistej pod kątem $\frac{5}{4}\pi$.

Dlatego wspomniana półprosta bez początku jest rozwiązaniem naszego równania.

Przykład 13
Narysować zbiór $A = \{z \in \mathbf{C}: \ \pi \leqslant arg(\mathbf{i}z)\}$.

Rozwiązanie. Przede wszystkim zauważmy, że z definicji argumentu głównego wynika, że

$$z \in A \Leftrightarrow \pi \leqslant arg(\mathbf{i}z) < 2\pi.$$

Zastosujemy teraz Uwagę 1: $arg(\mathbf{i}z) = arg\mathbf{i} + argz + 2k\pi$ dla pewnych całkowitych wartości k. Jak znaleźć te wartości? Wstawmy otrzymaną równość do wniosku uzyskanego z Uwagi 1, czyli napiszmy

$$\pi \leqslant \frac{\pi}{2} + \varphi + 2k\pi < 2\pi,$$

gdzie jak zwykle $\varphi = argz$. Po elementarnych przekształceniach otrzymamy

$$\frac{\pi}{2} - 2k\pi \leqslant \varphi < \frac{3}{2}\pi - 2k\pi.$$

To jest ten szukany warunek, który pozwoli wyznaczyć nam te „pewne" wartości, bowiem należy je dobrać tak, aby $\varphi \in [0, 2\pi)$. Zauważmy, że w tym przypadku tylko $k = 0$. Czytelnikowi zostawiamy zadanie ilustracji graficznej otrzymanego rozwiązania.

Kolej na przykład typowo algebraiczny.

Przykład 14
Rozwiązać równanie $\bar{z^4} = z^2|z^2|$. *Wynik przedstawić graficznie.*

Rozwiązanie. Zbiór rozwiązań równania oznaczymy przez A. Ponieważ wykorzystamy postać trygonometryczną, indywidualnie musimy sprawdzić, czy zdanie $0 \in A$ jest prawdziwe. Wprost z postaci równania otrzymujemy odpowiedź twierdzącą. Dlatego dalej założymy, że $z \neq 0$. Oznacza to, że $z = \varrho(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi)$, gdzie kolejno $\varrho = |z|, \varphi = argz \in [0, 2\pi)$. Jak zobaczymy ostatni warunek jest bardzo istotny! Jesteśmy gotowi, aby oryginalne równanie zapisać w postaci trygonometrycznej - po podstawieniu ostatniej równości do równania dostaniemy (będziemy korzystali z kilku zasad, jakich?)

$$\varrho^4\Big(\cos(-4\varphi) + \mathbf{i}\sin(-4\varphi)\Big) = \varrho^4\Big(\cos(2\varphi) + \mathbf{i}\sin(2\varphi)\Big).$$

Skorzystamy teraz z *zasady porównywania*, skąd otrzymamy następujący układ:

$$\varrho^4 = \varrho^4 \text{ i } -4\varphi = 2\varphi + 2k\pi, \text{ dla pewnych } k \in \mathbf{Z}.$$

Oczywiście układ ten jest równoważny

$$\varrho > 0 \text{ i } 6\varphi = -2k\pi, \text{ dla pewnych } k \in \mathbf{Z}.$$

Bezpośrednim rachunkiem wynika stąd, że (proszę to zrobić!)

$$\varrho > 0 \text{ i } \varphi = -\frac{1}{3}k\pi, \text{ dla } k = 0, -1, -2, -3, -4, -5.$$

Sporządzenie odpowiedniego rysunku zostawiam Czytelnikowi.

6.5 Pierwiastkowanie zespolone

Niech $z \neq 0$ oraz $n \geqslant 2$. Każdą liczbę zespoloną w, taką że $w^n = z$ będziemy nazywali *zespolonym pierwiastkiem stopnia n z liczby z.*

Przykład 15
Obliczyć wszystkie pierwiastki zespolone stopnia 2 z liczby zespolonej 4.

Rozwiązanie. Z definicji szukamy takich liczb zespolonych $w = x + y\mathbf{i}$, że $w^2 = 4$, czyli $(x^2 - y^2) + 2xy\mathbf{i} = 4$. Dlatego $x^2 - y^2 = 4$, $2xy = 0$, co oznacza, że $y = 0$, $x \in \{-2, 2\}$. Dlatego są to dwie liczby $w_1 = -2$, $w_2 = 2$.

Powyższy przykład pokazuje, że operacja pierwiastkowania zespolonego nie jest działaniem (wynik nie jest jednoznaczny), a więc różni się od dobrze znanego pojęcia pierwiastka rzeczywistego.

Przykład 16
Obliczyć wszystkie pierwiastki zespolone stopnia dwa z liczby -1.

Rozwiązanie. Powtarzając rozumowanie z powyższego przykładu dostaniemy zbiór $\{-\mathbf{i}, \mathbf{i}\}$.

Weźmy teraz $n > 2$. Stosowanie postaci algebraicznej, tak jak zrobiono to w obu ostatnich przykładach, staje się uciążliwe. Dlatego sięgniemy po postać trygonometryczną.

Przykład 17
Obliczyć pierwiastki zespolone stopnia $n = 5$ z liczby zespolonej 1.

Rozwiązanie. Równanie $w^5 = 1$ rozwiążemy metodą postaci trygonometrycznej. W tym celu niech $w = \rho(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi)$, gdzie $\rho = |w|$, $\varphi = \arg w \in < 0, 2\pi)$.[8] Stosując wzór de Moivre'a dostaniemy:

$$w^5 = 1 \Leftrightarrow \rho^5(\cos 5\varphi + \mathbf{i}\sin 5\varphi) = 1(\cos 0 + \mathbf{i}\sin 0).$$

Z zasady porównywania liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej oznacza to, że

$$\rho^5 = 1,\ 5\varphi = 2k\pi \text{ dla pewnych } k \in \mathbf{Z}.$$

Dlatego

$$\rho = 1,\ \varphi = \frac{2\pi}{5}k,\ k = 0, 1, 2, 3, 4,$$

bowiem tylko wtedy $\varphi \in < 0, 2\pi)$. Mamy zatem 5 różnych pierwiastków zespolonych z liczby 1: $w_0, w_1, \ldots, w_4$, gdzie

$$w_k = \cos\frac{2\pi}{5}k + \mathbf{i}\sin\frac{2\pi}{5}k,\ k = 0, 1, 2, \ldots, 4. \tag{7}$$

Czas na uogólnienie wzoru (7).

[8] Taka postać istnieje ponieważ $w \neq 0$.

Fakt 7 *(I zasada pierwiastkowania zespolonego)*
Dla każdej liczby zespolonej $z \neq 0$, $n \geqslant 1$ istnieje dokładnie n różnych pierwiastków zespolonych z liczby z. Piszemy wtedy

$$\sqrt[n]{z}_{\mathbf{C}} = \{w_o, w_1, \ldots, w_{n-1}\},$$

gdzie $w_k^n = z$ dla $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ oraz liczby w_k znajdujemy techniką zaprezentowaną w przykładzie 17. Dlatego możemy napisać:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}_{\mathbf{R}}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + \mathbf{i}\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

gdzie symbol $\sqrt[n]{\cdot}_{\mathbf{R}}$ oznacza pierwiastek rzeczywisty stopnia n, $\varphi = arg z$.

Podstawiając w ostatnim wzorze $z = 1$ i oznaczając przez $\epsilon_k = w_k$ otrzymamy

$$\sqrt[n]{1}_{\mathbf{C}} = \{\epsilon_o, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_{n-1}\} = \{\cos\frac{2k\pi}{n} + \mathbf{i}\sin\frac{2k\pi}{n},\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1\}. \tag{8}$$

Stąd, z *zasady mnożenia* oraz z *I zasady pierwiastkowania* otrzymujemy kolejną zasadę.

Fakt 8 *(II zasada pierwiastkowania)*

$$w_k = w_o\epsilon_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Zastosowanie II zasady pierwiastkowania wyjaśnia kolejny przykład.

Przykład 18 *Rozwiązać równanie $z^5 = 32$.*

Rozwiązanie. Zauważmy, że $32 = 2^5$. Dlatego jednym z rozwiązań równania jest liczba 2. Z definicji jest ona pierwiastkiem zespolonym stopnia 5 z liczby 32. Oznaczmy ją jako w_o. II zasada mówi, że wtedy kolejne pierwiastki są postaci:

$$w_k = 2\epsilon_k = 2\left(\cos\frac{2k\pi}{5} + \mathbf{i}\sin\frac{2k\pi}{5}\right),\ k = 1, 2, 3, 4.$$

Istotnie, ze wzoru de Moivre'a

$$w_k^5 = 2^5\left(\cos 2k\pi + \mathbf{i}\sin 2k\pi\right) = 32,$$

oraz liczby zespolone w_k są parami różne dla $k = 0, 1, 2, 3, 4$ (dlaczego?).

7 Zadania

Zadanie 1

Dane są dwie liczby zespolone w postaci kanonicznej $z_1 = (-1, 2)$, $z_2 = (3, -4)$. *Obliczyć ich iloczyn. Sprawdzić, czy istnieje liczba zespolona w spełniająca warunek* $z_1 \odot w = z_2$.

Zadanie 2

Sprawdzić, że dla liczb zespolonych z, z_1, z_2 *zachodzą następujące równości:*

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2},\ \overline{z_1 z_2} = (\overline{z_1})(\overline{z_2}),\ z\overline{z} = |z|^2,\ |-z| = |z| = |\overline{z}|.$$

Zadanie 3

Rozwiązać równania:

$$z^2 = 4\overline{z},\ z^2 - 4z + 13 = 0,\ (z+2)^2 = (\overline{z}+2)^2,\ \overline{z + \mathbf{i}} - z + \mathbf{i} = 0.$$

Zadanie 4

Rozwiązać nierówności:

$$\mathfrak{Re}(z+1) < 0,\ |\mathbf{i} - z| < 3,\ 2 \leqslant |z + \mathbf{i}| < 4,\ \mathfrak{Im}[(1+2\mathbf{i})z - 3\mathbf{i}] < 0.$$

Zadanie 5

Wyznaczyć $arg z$, *jeśli*

$$z = -i, \quad z = 1 - i,\ z = \sqrt{3} - i, \quad z = 7 + 7i.$$

Zadanie 6

Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiory spełniające warunki:

$$arg z = \frac{5\pi}{4}; \quad \pi \leqslant arg(iz) < 2\pi, \quad arg(z^6) = \pi.$$

Zadanie 7

Podane liczby zespolone zapisać w postaci trygonometrycznej:

$$\sqrt{3} + i, \quad i, \quad -5 + 5\sqrt{5}i.$$

Zadanie 8

Zapisać w postaci trygonometrycznej liczby: $1 + \mathbf{i}\operatorname{tg}\alpha$, $\sin\alpha + \mathbf{i}\cos\alpha$, *gdzie* $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Zadanie 9

Doprecyzować następujące formuły:

$$arg(z_1 z_2) = \ldots$$

$$arg(\frac{z_1}{z_2}) = \ldots$$

$$arg(-z) = \ldots$$

$$arg(\bar{z}) = \ldots$$

Zadanie 10
Obliczyć $\frac{(1+\mathbf{i})^{22}}{(1-\mathbf{i}\sqrt{3})^6}$.

Zadanie 11
Wykonać podane działania (wyniki podać w postaci trygonometrycznej):

$$(1+i)^{2016}, \quad (2\sqrt{3}-2i)^{30}, \quad \frac{(1+i)^{25}}{(1-i\sqrt{3})^5}.$$

Zadanie 12
Narysować rozwiązanie równania $arg(z^6) = \pi$.

Zadanie 13
Rozwiązać równania: $z^5 = 1$, $(\bar{z})^2 z^2 = \frac{4}{z^2}$.

Zadanie 14
Obliczyć, a następnie zinterpretować wynik operacji $\sqrt[7]{1_{\mathbf{C}}}$.

Zadanie 15
Uzasadnić, że pierwiastki zespolone stopnia n *z jedności tworzą cią geometryczny. Wyznaczyć ich sumę.*

Zadanie 16
Korzystając z II zasady pierwiastkowania zespolonego oraz z wyniku poprzedniego zadania uzasadnić, że suma wszystkich pierwiastków zespolonych stopnia n *z dowolnej niezerowej liczby zespolonej jest równa* 0.