

Liczby p_j można nadać prostą interpretację fizyczną – wag. W szczególności jeśli wagi te są sobie równe, a więc

$$p_1 = p_2 = \dots = p_n = p,$$

to

$$p = \frac{1}{n}.$$

Prowadzi to nas do pierwszego w historii teorii prawdopodobieństwa wzoru

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

gdzie symbolem $|B|$ oznaczyliśmy liczebność elementów zbioru B .

Mówimy też że mamy do czynienia z przestrzenią prawdopodobieństwa: dyskretną, skończoną i jednorodną. Wtedy prawdopodobieństwo zdarzenia A mówi nam jak jest częstości zajścia tego zdarzenia. powyższy wzór nazywany jest też wzorem na prawdopodobieństwo klasyczne.

Przykład 2.3.3 We wstępie zacytowaliśmy znany problem Montmorta. Przypomnijmy go.

W urnie znajduje się n ponumerowanych kul. Losujemy bez zwracania po jednej kuli. Jakie jest prawdopodobieństwo, że żadnej kuli nie wylosujemy w kolejności odpowiadającej jej numerowi?

Zacniemy od opisanie wyniku opisanego wyżej eksperymentu. Z przedstawionego opisu wynika, że

$$\omega = (l_1, l_2, \dots, l_n),$$

gdzie l_j oznacza numer j -tej wylosowanej kuli. W takim razie ω jest jedną z n -elementowych permutacji zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$. Ponieważ Ω składa się ze wszystkich takich zdarzeń, więc jak dobrze wiadomo $|\Omega| = n!$. Zakładając, że dla losującego kule te są nierozróżnialne, oznacza to, że mamy do czynienia z modelem dyskretnym, skończonym i jednorodnym z prawdopodobieństwem zdarzenia elementarnego równym

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{n!}.$$

Z treści problemu wynika, że pytamy się o prawdopodobieństwo zdarzenia A_n , gdzie

$$\omega \in A_n \Leftrightarrow \text{permutacja } \omega \text{ jest przestawieniem,}$$

czyli (patrz np. [14])

$$\forall_{1 \leq i \leq n} \omega(i) \neq i.$$

Dobrze wiadomo (patrz np. przykład 4.5.12 w [14]), że liczba takich przestawień wynosi

$$|A_n| = n! \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j!}.$$

W takim razie rozwiązanie problemu Montmorta wygląda następująco

$$P(A_n) = \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j!}.$$

Interesująca jest symulacja numeryczna tego zagadnienia. Dla dwóch kul $P(A_2) = \frac{1}{2}$, dla trzech $P(A_3) = \frac{1}{3}$, czterech $P(A_4) = \frac{3}{8}$. Ciekawe rzeczy zaczynają się dziać dla $n \geq 6$. Można na przykład sprawdzić (patrz np. [20]), że z dokładnością do sześciu miejsc po przecinku prawdopodobieństwa $P(A_n)$ dla kul od sześciu aż do 100 milionów są równe 0,367879. Dlaczego tak się dzieje? Z jednej strony fakt, że w urnie znajduje się co raz więcej kul powoduje, że wylosowanie kolejnej kuli staje się co raz mniejsze. Z drugiej strony wzrasta szansa, że kolejno wylosowana kula będzie właściwa, a więc, że jej numer będzie różny od liczby losowania. Efektem tego równoważenia się jest to, że prawdopodobieństwa te różnią się minimalnie dla różnych ilości kul w urnie.

Prześledźmy jeszcze co będzie działo się z $P(A_n)$, jeśli liczba kul będzie dowolnie duża. Z twierdzenia o liczbie Eulera wynika, że (patrz Dodatek)

$$P(A_n) \longrightarrow \frac{1}{e}.$$

Można pokazać, że ciąg ten bardzo szybko zbieżny jest do swojej granicy, w przeciwieństwie do dobrze znanego ciągu $(1 - \frac{1}{n})^n$, co precyzyjnie tłumaczy, dlaczego poczynszy od liczby 6 wyrazy tego ciągu są bliskie sobie.

Następujący przykład pokazuje, że metodami rachunku prawdopodobieństwa można rozwiązywać problemy pochodzące z kombinatoryki.

Przykład 2.3.4 Pokażemy następującą równość:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad \text{dla } 1 \leq k \leq n-1.$$

Oczywiście wystarczy pokazać, że

$$\frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} + \frac{\binom{n-1}{k}}{\binom{n}{k}} = 1.$$