

Uwaga 2.3.3 *Prawdopodobieństwo $P(A|B)$ nazywa się też prawdopodobieństwem a posteriori, czyli będącym następstwem faktu, który w tym przypadku jest warunkiem w postaci zdarzenia B . Wtedy $P(A)$ nazywamy prawdopodobieństwem a priori, czyli mającym znaczenie pierwotne.*

Przykład 2.3.5 *Rzucamy dwukrotnie kostkę do gry. Niech A oznacza zdarzenie, że w pierwszym rzucie pojawiła się szóstka, B – zdarzenie, że w drugim rzucie wypadła jedynka. Zbadać stochastyczną niezależność tych zdarzeń.*

Zdefiniujemy najpierw przestrzeń probabilistyczną. Ponieważ musimy rejestrować wyniki kolejnych rzutów przyjmujemy, że

$$\omega = (k_1, k_2),$$

gdzie k_1, k_2 oznaczają wyniki zarejestrowane na kostce pierwszej i drugiej, czyli $k_1, k_2 \in \{1, 2, \dots, 6\}$. W takim razie Ω jest zbiorem wszystkich ciągów długości dwa o wartościach w zbiorze $\{1, 2, \dots, 6\}$, czyli zbiorem dwu elementowych wariacji z powtórzeniami zbioru sześćo elementowego. Dlatego $|\Omega| = 6^2 = 36$. Ze względu na przyjmowaną domyślnie symetrię kostki należy przyjąć, że $P(\{\omega\}) = \frac{1}{36}$ dla każdego $\omega \in \Omega$. Oznacza to, że mamy do czynienia z modelem skończonym jednorodnym.

Zauważmy, że z definicji zdarzenia A i B możemy zapisać następująco:

$$A = \{6\} \times \{1, 2, \dots, 6\}, \quad B = \{1, 2, \dots, 6\} \times \{1\}.$$

Ponieważ

$$|A| = |B| = 6,$$

więc

$$P(A)P(B) = \left(\frac{6}{36}\right)^2.$$

Z definicji iloczynu kartezjańskiego wynika, że wtedy

$$A \cap B = \{6\} \times \{1\} = (6, 1),$$

dlatego $|A \cap B| = 1$ i $P(A \cap B) = \frac{1}{36} \neq P(A)P(B)$. Oznacza to, że zdarzenia te nie są stochastycznie niezależne.

Kolejny przykład pokazuje klasyczne zastosowanie wzoru Bayesa.

Przykład 2.3.6 Dwóch strzelców celuje do wspólnej tarczy i oddaje strzały. Wiadomo, że w określonym czasie pierwszy z nich jest w stanie średnio oddać n_1 strzałów, drugi n_2 . Z obserwacji celności oddanych strzałów wynika, że skuteczność pierwszego jest na poziomie $p_1\%$, drugiego $p_2\%$. Podczas sesji strzeleckiej trafiono w tarczę. Obliczyć prawdopodobieństwo, że uczynił to strzelec drugi.

Oznaczmy przez C_1 i C_2 zdarzenia polegające na tym, że strzelec pierwszy i odpowiednio drugi wystrzelił do tarczy. Z treści zadania wynika, że możemy przyjąć:

$$\frac{P(C_1)}{P(C_2)} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Niech B oznacza zdarzenie, że wystrzelony pocisk trafił w tarczę. Z założenia

$$P(B|C_1) = \frac{p_1}{100}, \quad P(B|C_2) = \frac{p_2}{100}.$$

Interesuje nas prawdopodobieństwo a posteriori $P(C_2|B)$, które wyliczymy ze wzoru Bayesa

$$P(C_2|B) = \frac{P(B|C_2)P(C_2)}{P(B)},$$

gdzie prawdopodobieństwo a priori obliczymy ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite

$$P(B) = P(B|C_1)P(C_1) + P(B|C_2)P(C_2).$$

Dlatego

$$P(C_2|B) = \frac{P(B|C_2)P(C_2)}{P(B|C_1)P(C_1) + P(B|C_2)P(C_2)} = \frac{p_2 \frac{n_2}{n_1} P(C_1)}{p_1 P(C_1) + p_2 \frac{n_2}{n_1} P(C_1)},$$

co po uporządkowaniu daje

$$P(C_2|B) = \frac{n_2 p_2}{n_1 p_1 + n_2 p_2}.$$

Przypuśćmy teraz, że mamy co najmniej trzy zdarzenia, czyli n -elementową podrodzinę $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ rodziny Σ .

Definicja 2.3.3 Powiemy, że $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ jest rodziną zdarzeń stochastycznie niezależnych, jeśli dla dowolnego wyboru elementów tej rodziny $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$, $2 \leq k \leq n$, zachodzi równość

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k}).$$