Uwaga 2.3.3 *Prawdopodobieństwo $P(A|B)$ nazywa się też prawdopodobieństwem a posteriori, czyli będącym następstwem faktu, który w tym przypadku jest warunkiem w postaci zdarzenia B. Wtedy $P(A)$ nazywamy prawdopodobieństwem a priori, czyli mającym znaczenie pierwotne.*

Przykład 2.3.5 *Rzucamy dwukrotnie kostką do gry. Niech A oznacza zdarzenie, że w pierwszym rzucie pojawiła się szóstka, B–zdarzenie, że w drugim rzucie wypadła jedynka. Zbadać stochastyczną niezależność tych zdarzeń.*

Zdefiniujemy najpierw przestrzeń probabilistyczną. Ponieważ musimy rejestrować wyniki kolejnych rzutów przyjmiemy, że

$$\omega = (k_1, k_2),$$

gdzie k_1, k_2 oznaczają wyniki zarejestrowane na kostce pierwszej i drugiej, czyli $k_1, k_2 \in \{1, 2, \ldots, 6\}$. W takim razie Ω jest zbiorem wszystkich ciągów długości dwa o wartościach w zbiorze $\{1, 2, \ldots, 6\}$, czyli zbiorem dwu elementowych wariacji z powtórzeniami zbioru sześcio elementowego. Dlatego $|\Omega| = 6^2 = 36$. Ze względu na przyjmowaną domyślnie symetrię kostki należy przyjąć, że $P(\{\omega\}) = \frac{1}{36}$ dla każdego $\omega \in \Omega$. Oznacza to, że mamy do czynienia z modelem skończonym jednorodnym.

Zauważmy, że z definicji zdarzenia A i B możemy zapisać następująco:

$$A = \{6\} \times \{1, 2, \ldots, 6\},\ B = \{1, 2, \ldots, 6\} \times \{1\}.$$

Ponieważ

$$|A| = |B| = 6,$$

więc

$$P(A)P(B) = \left(\frac{6}{36}\right)^2.$$

Z definicji iloczynu kartezjańskiego wynika, że wtedy

$$A \cap B = \{6\} \times \{1\} = (6, 1),$$

dlatego $|A \cap B| = 1$ i $P(A \cap B) = \frac{1}{36} = P(A)P(B)$. Oznacza to, że zdarzenia te są stochastycznie niezależne.

Kolejny przykład pokazuje klasyczne zastosowanie wzoru Bayesa.

Przykład 2.3.6 *Dwóch strzelców celuje do wspólnej tarczy i oddaje strzały. Wiadomo, że w określonym czasie pierwszy z nich jest w stanie średnio oddać* n_1 *strzałów, drugi–*n_2*. Z obserwacji celności oddanych strzałów wynika, że skuteczność pierwszego jest na poziomie* $p_1\%$*, drugiego–*$p_2\%$*. Podczas sesji strzeleckiej trafiono w tarczę. Obliczyć prawdopodobieństwo, że uczynił to strzelec drugi.*

Oznaczmy przez C_1 *i* C_2 *zdarzenia polegające na tym, że strzelec pierwszy i odpowiednio drugi wystrzelił do tarczy. Z treści zadania wynika, że możemy przyjąć:*

$$\frac{P(C_1)}{P(C_2)} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Niech B *oznacza zdarzenie, że wystrzelony pocisk trafił w tarczę. Z założenia*

$$P(B|C_1) = \frac{p_1}{100},\ P(B|C_2) = \frac{p_2}{100}.$$

Interesuje nas prawdopodobieństwo a posteriori $P(C_2|B)$*, które wyliczymy ze wzoru Bayesa*

$$P(C_2|B) = \frac{P(B|C_2)P(C_2)}{P(B)},$$

gdzie prawdopodobieństwo a priori obliczymy ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite

$$P(B) = P(B|C_1)P(C_1) + P(B|C_2)P(C_2).$$

Dlatego

$$P(C_2|B) = \frac{P(B|C_2)P(C_2)}{P(B|C_1)P(C_1) + P(B|C_2)P(C_2)} = \frac{p_2\frac{n_2}{n_1}P(C_1)}{p_1P(C_1) + p_2\frac{n_2}{n_1}P(C_1)},$$

co po uporządkowaniu daje

$$P(C_2|B) = \frac{n_2p_2}{n_1p_1 + n_2p_2}.$$

Przypuśćmy teraz, że mamy co najmniej trzy zdarzenia, czyli n–elementową podrodzinę $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ rodziny Σ.

Definicja 2.3.3 *Powiemy, że* $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ *jest rodziną zdarzeń stochastycznie niezależnych, jeśli dla dowolnego wyboru elementów tej rodziny* $A_{i_1}, A_{i_2} \ldots, A_{i_k}$*,* $2 \le k \le n$*, zachodzi równość*

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \ldots P(A_{i_k}).$$