

Twierdzenie 3.4.4 (*Twierdzenie Poissona*) Niech $(\mathbf{Z}_n)$ będzie ciągiem zmiennych losowych o rozkładzie $B(n, p_n)$. Jeśli ciąg (np_n) jest zbieżny do liczby dodatniej a , to

$$P(\{\omega \in \Omega : \mathbf{Z}_n(\omega) = k\}) \longrightarrow e^{-a} \frac{a^k}{k!}$$

dla każdej nieujemnej liczby całkowitej k .

Powyższe twierdzenie jest jednym z pierwszych tzw. *twierdzeń granicznych* w teorii prawdopodobieństwa. O innych opowiemy w kolejnym rozdziale.

Z punktu widzenia twierdzenia Poissona, możemy powiedzieć, że ciąg zmiennych losowych o rozkładach Bernoulliego jest *zbieżny* do zmiennej losowej o rozkładzie Poissona.

Praktyczne zastosowanie tego twierdzenia polega na tym, że dla dostatecznie dużych liczb n mamy następujące przybliżenie

$$P(\{\omega \in \Omega : \mathbf{Z}_n(\omega) = k\}) \approx e^{-a} \frac{a^k}{k!}.$$

Uwaga 3.4.3 Dokładniej, można pokazać, że przybliżenie to jest dostatecznie dokładne, jeśli spełnione są następujące warunki:

$$n \geq 100, \quad p \in (0, 0,1], \quad a \in [0,1, 10].$$

Pokażemy to na następującym przykładzie

Przykład 3.4.1 Załóżmy, że dokument złożony z $n \geq 100$ stron zawiera m błędów drukarskich, gdzie $0,1 \leq \frac{m}{n} \leq 10$.

Obliczmy prawdopodobieństwo, że na przypadkowo wybranej stronie liczba błędów wyniesie co najwyżej $0 \leq k \leq m$.

Niech $\mathbf{X} \in \{0, 1, \dots, m\}$ oznacza liczbę błędów na stronie tego dokumentu. Zakładając, że rozmieszczenie błędów na stronach przebiegało w sposób niezależny i jednakowo prawdopodobny, mamy

$$\mathbf{X} \in B(m, p), \text{ gdzie } p = 1/n.$$

Wtedy $mp = m/n \simeq \lambda$ i z założenia możemy skorzystać z Twierdzenia Poissona. Jeśli A_k oznacza zdarzenie, którego prawdopodobieństwo mamy obliczyć, to

$$P(A_k) \simeq \sum_{j=0}^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!}.$$