Rozdział 2

Model probabilistyczny Kołmogorowa

2.1 Pojęcie σ-ciała zbiorów

Rozdział ten zaczniemy od podania przykładu, który w podrozdziale 2.4 omówiony zostanie jeszcze raz z uwzględnieniem wszystkich szczegółów. W tej chwili zwrócimy uwagę tylko na istotę zagadnienia, która doprowadzi nas do pojęcia *modelu probabilistycznego*–podstawowego pojęcia tego rozdziału.

Przykład 2.1.1 *Wyobraźmy sobie, dla uproszczenia zagadnienia, że obserwujemy pojedynczy rzut monetą. Rzut uznamy za wykonany, jeśli moneta upadnie do góry orłem lub reszką. O tej monecie wiemy, że jest symetryczna co oznacza, że w wyniku jej rzutu nie mamy prawa oczekiwać wyniku w postaci: częściej wypadnie orzeł aniżeli reszka lub na odwrót. Z punktu widzenia przebiegu tego zjawiska możemy wyróżnić dwie chwile: moment wyrzutu monety i moment jej upadku. Zastanowimy się nad następującym problemem:*

w jaki sposób w chwili wyrzutu monety opisać wynik jej upadku?

Rozwiązanie problemu nr 1

O wyniku eksperymentu decydują prawa fizyki. Wyrzucenie monety jest objawem podziałania wypadkowej sił: siły przyłożenia, siły grawitacji i innych sił zewnętrznych (np. sił tarcia). Siła ta wykona pewną pracę, efektem której bądzie to, że moneta wykonując ruch rotacyjny wzdłuż swojej osi symetrii pokona drogę wznosząc się na pewną wysokość. W pewnym momencie osiągnie wysokość maksymalną i dalej wykonując ruch rotacyjny, pod wpływem siły wypadkowej sił grawitacji i zewnętrznych zacznie spadać, aż osiągnie swój cel, co objawi się wynikiem eksperymentu. Z teoretycznego punktu widzenia wynik takiego eksperymentu można przewidzieć, o ile:

1. *w chwili początkowej będziemy dysponowali wszystkimi danymi,*

2. *przetworzymy te dane za pomocą równania ruchu opisującego to zjawisko.*

Fizyka pokazuje, że z teoretycznego punktu widzenia jest to możliwe. Z praktycznego punktu widzenia, ogrom czynników współdecydujących o zachowaniu się monety w chwili wyrzutu i w trakcie drogi jaką pokonuje w krótkim czasie stwarza określone problemy natury technicznej. Z tego względu taka metoda wydaje się być mało skuteczna.

Rozwiązanie problemu nr 2

Odpowiedź na pytanie co stanie się z monetą w chwili jej upadku oprzemy na zjawisku przewidywania. Zakładając, że moneta jest symetryczna, a rzut tą monetą nie jest skalkulowany na z góry określony wynik, a więc eksperymentator umyślnie nie wpływa na wynik rzutu, należy przyjąć, że szanse wypadnie reszki jak i orła są jednakowe, czyli 50 *do* 50. *Spróbujmy doprecyzować to stwierdzenie. W tym celu opiszemy najpierw wyniki naszego eksperymentu, nazywając je roboczo stanami. Na pewno mamy takie dwa stany i są nimi: "orzeł"i "reszka". Z takich stanów skonstruujemy zbiór* W*, czyli*

$$W = \{orzeł, reszka\}.$$

Nie są to jednak wszystkie stany związane z naszym eksperymentem. Musimy bowiem wziąć pod uwagę jeszcze dwie sytuacje:

1. *stan, który oznacza, że eksperyment nie udał się. Zgodnie z poczynionymi założeniami stan taki nigdy nie pojawi się. Dla celów opisu ilościowego musi być jednak brany pod uwagę,*

2. *stan, który jest konsekwencją stwierdzenia, że eksperyment udał się, bez wskazywania jak moneta upadła: orłem czy reszką.*

Ponieważ stany, o których mowa jest powyżej są rozłączne oraz wzajemnie uzupełniają się, pierwszy z nich reprezentuje zbiór pusty, drugi zbiór W*. W takim razie zbiór wszystkich stanów naszego eksperymentu jest rodziną zbiorów*

$$\{\emptyset, W, \{orzeł\}, \{reszka\}\},$$

którą oznaczaliśmy przez $\mathcal{P}(W)$.

Należy teraz "zmierzyć" każdy z tych stanów, a więc zaproponować funkcję, która każdemu stanowi z rodziny $\mathcal{P}(W)$ *przyporządkuje według przyjętych zasad jedyną liczbę rzeczywistą. Sformułujemy najpierw te zasady.*

1. *Ponieważ zaproponowany opis ma być uniwersalny, zbiór wartości takiej funkcji powinien być zawsze jednakowy. W takim razie możemy przyjąć, że jest to przedział liczbowy* $[a, b]$.

2. *W zbiorze stanów mamy naturalny porządek oparty na zjawisku inkluzji zbiorów. Jeśli dla dwóch stanów s_1, s_2 mamy $s_1 \subset s_2$, to musi to oznaczać, że stan s_1 nie jest więcej przewidywalny aniżeli s_2. Dlatego dla liczb p_1, p_2 będących wynikiem zmierzenia takich stanów powinniśmy odnotować, że $p_1 \leq p_2$.*

3. *Wśród stanów, stan $\emptyset$ jest osobliwy–pojawia się w wykazie stanów, ale nigdy nie zostanie zaobserwowany. W takim razie efektem jego pomiaru powinna być liczba najmniejsza z przedziału $[a, b]$, czyli a. Z drugiej strony stan W jest największy, więc efektem jego zmierzenia będzie liczba b, jako największa. Ale oba te stany tworzą całość, bowiem $\emptyset \cup W = W$. Dlatego powinno być*
$$b = b - a \Leftrightarrow a = 0.$$

Oznaczając funkcję, która mierzy stany przez P dostaniemy

$$\forall_s \; P(\emptyset) \leq P(s) \leq b.$$

Ponadto, z założenia, że moneta jest symetryczna powinna zachodzić równość

$$P(\{orzeł\}) = P(\{reszka\}) = p, \;\; 2p = b.$$

Pozostaje ustalić wartość liczbową b. Z empirycznego punktu widzenia ustalenie wyniku pomiaru stanu s powinno sprowadzać się do wielokrotnego rzutu taką monetą i na rejestrowaniu liczby $|s|$ zaobserwowania stanu s w n rzutach i wzięcia frekwencji $\frac{|s|}{n}$. W szczególności, jeśli tym stanem będzie W, to $|W| = n$ i frekwencja wyniesie jeden. Dlatego przyjmiemy, że $b = 1$ i dlatego $p = \frac{1}{2}$.

Na koniec spróbujmy podsumować dotychczasowe rozważania. Opis eksperymentu polegającego na rzucie monetą symetryczną, z punktu widzenia wyników tego doświadczenia, oparty na metodzie przewidywań sprowadza się do trzech kwestii:

- *zdefiniowania zbiorów obserwowanych wyników eksperymentu. W naszym przypadku jest to zbiór $W = \{orzeł, reszka\}$,*

- *zdefiniowania rodziny wszystkich możliwych stanów związanych z tym doświadczeniem, co prowadzi do rodziny zbiorów $\{\emptyset, W, \{orzeł\}, \{reszka\}\}$,*

- *zmierzenia każdego stanu funkcją P, gdzie*
$$s \longrightarrow P(s) \in [0, 1]$$
oraz
$$P(\emptyset) = 0, \;\; P(W) = 1, \;\; P(\{orzeł\}) = P(\{reszka\}) = \frac{1}{2}.$$

Historia nauki (nie tylko matematyki!) pokazała, że druga koncepcja przyjęła się i z powodzeniem pozwala rozstrzygnąć kwestie poruszane w powyższym przykładzie w przypadku innych, bardziej złożonych zagadnień (piszemy o tym więcej w podrozdziale 2.4).

Zajmiemy się teraz opisem zasygnalizowanego w powyższym przykładzie modelu. W podrozdziale 1.2 omówiliśmy podstawowe pojęcia związane z rodziną zbiorów. Teraz będziemy zajmowali się rodzinami, które są *dobrze zorganizowane*, dokładniej, mają pewne dodatkowe własności, na które zwróciliśmy uwagę już w przykładzie 2.1.1.

Definicja 2.1.1 *Niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną podzbiorów ustalonego niepustego zbioru X. Powiemy, że $\mathcal{A}$ jest σ–ciałem, jeśli spełnione są następujące warunki:*

1.

$$\emptyset \in \mathcal{A}$$

2.

$$\forall_{A\in\mathcal{A}} \quad A^c \in \mathcal{A}$$

3.

$$\forall_{n\in\mathcal{N}_o} \quad A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathcal{N}_o} A_n \in \mathcal{A}.$$

Zatem każda rodzina zbiorów zawierająca zbiór pusty, zamknięta na działania dopełnienia mnogościowego i brania sumy jej dowolnej przeliczalnej podrodziny ma własność σ-ciała.

Dla lepszego zrozumienia omawianego wyżej pojęcia zaczniemy od kilku uwag.

Uwaga 2.1.1 *Nie każda rodzina podzbiorów jest σ-ciałem. Rzeczywiście, wystarczy wziąć dowolną rodzinę podzbiorów nie zawierającą zbioru pustego.*

Uwaga 2.1.2 *Najmniejsze σ-ciało musi zawierać co najmniej dwa zbiory: zbiór pusty i X, co wynika z aksjomatu 1 i 2 definicji 2.1.1. Co więcej, rodzina złożona z tych dwóch zbiorów jest już σ-ciałem. Taki przykład σ-ciała będziemy nazywali σ–ciałem trywialnym.*

Uwaga 2.1.3 *Z definicji 2.1.1 wynika, że rodzina $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ jest σ-ciałem. Oczywiście jest to największe σ-ciało podzbiorów zbioru X.*