Liczbom p_j można nadać prostą interpretację fizyczną–wag. W szczególności jeśli wagi te są sobie równe, a więc

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p,$$

to

$$p = \frac{1}{n}.$$

Prowadzi to nas do pierwszego w historii teorii prawdopodobieństwa wzoru

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

gdzie symbolem $|B|$ oznaczyliśmy liczebność elementów zbioru B.

Mówimy też że mamy do czynienia z przestrzenią prawdopodobieństwa: dyskretną, skończoną i jednorodną. Wtedy prawdopodobieństwo zdarzenia A mówi nam jak jest częstości zajścia tego zdarzenia. powyższy wzór nazywany jest też wzorem na prawdopodobieństwo klasyczne.

Przykład 2.3.3 *We wstępie zacytowaliśmy znany problem Montmorta. Przypomnijmy go.*

> *W urnie znajduje się n ponumerowanych kul. Losujemy bez zwracania po jednej kuli. Jakie jest prawdopodobieństwo, że żadnej kuli nie wylosujemy w kolejności odpowiadającej jej numerowi?*

Zaczniemy od opisania wyniku opisanego wyżej eksperymentu. Z przedstawionego opisu wynika, że

$$\omega = (l_1, l_2, \ldots, l_n),$$

gdzie l_j oznacza numer j–tej wylosowanej kuli. W takim razie ω jest jedną z n–elementowych permutacji zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$. Ponieważ Ω składa się ze wszystkich takich zdarzeń, więc jak dobrze wiadomo $|\Omega| = n!$. Zakładając, że dla losującego kule te są nierozróżnialne, oznacza to, że mamy do czynienia z modelem dyskretnym, skończonym i jednorodnym z prawdopodobieństwem zdarzenia elementarnego równym

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{n!}.$$

Z treści problemu wynika, że pytamy się o prawdopodobieństwo zdarzenia A_n, gdzie

$$\omega \in A_n \Leftrightarrow \text{permutacja } \omega \text{ jest przestawieniem},$$

czyli (patrz np. [14])

$$\forall_{1\leq i\leq n}\ \omega(i)\neq i.$$

Dobrze wiadomo (patrz np. przykład 4.5.12 w [14]), że liczba takich przestawień wynosi

$$|A_n| = n!\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{n!}.$$

W takim razie rozwiązanie problemu Montmorta wygląda następująco

$$P(A_n) = \sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{n!}.$$

Interesująca jest symulacja numeryczna tego zagadnienia. Dla dwóch kul $P(A_2)=\frac{1}{2}$, dla trzech $P(A_3)=\frac{1}{3}$, czterech $P(A_4)=\frac{3}{8}$. Ciekawe rzeczy zaczynają siędziać dla $n\geq 6$. Można na przykład sprawdzić (patrz np. [20]), że z dokładnością do sześciu miejsc po przecinku prawdopodobieństwa $P(A_n)$ dla kul od sześciu aż do 100 milionów są równe $0,367879$. Dlaczego tak się dzieje? Z jednej strony fakt, że w urnie znajduje się co raz więcej kul powoduje, że wylosowanie kolejnej kuli staje się co raz mniejsze. Z drugiej strony wzrasta szansa, że kolejno wylosowana kula będzie właściwa, a więc, że jej numer będzie różny od liczby losowania. Efektem tego równoważenia się jest to, że prawdopodobieństwa te różnią się minimalnie dla różnych ilości kul w urnie.

Prześledźmy jeszcze co będzie działo się z $P(A_n)$, jeśli liczba kul będzie dowolnie duża. Z twierdzenia o liczbie Eulera wynika, że (patrz Dodatek)

$$P(A_n)\longrightarrow\frac{1}{e}.$$

Można pokazać, że ciąg ten bardzo szybko zbieżny jest do swojej granicy, w przeciwieństwie do dobrze znanego ciągu $(1-\frac{1}{n})^n$, co precyzyjnie tłumaczy, dlaczego począwszy od liczby 6 wyrazy tego ciągu są bliskie sobie.

Następujący przykład pokazuje, że metodami rachunku prawdopodobieństwa można rozwiązywać problemy pochodzące z kombinatoryki.

Przykład 2.3.4 *Pokażemy następującą równość:*

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k},\quad dla\ \ 1\leq k\leq n-1.$$

Oczywiście wystarczy pokazać, że

$$\frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}}+\frac{\binom{n-1}{k}}{\binom{n}{k}}=1.$$