Etap trzeci realizacji procesu analizy danych statystycznych w zasadzie powinien rozwiązać nasz zasadniczy problem związany z identyfikacją cechy populacji generalnej w języku teorii prawdopodobieństwa. Powinniśmy wiedzieć, jakiego typu jest to rozkład i dysponować oszacowaniem jego parametrów.

Statystyka dysponuje jednak jeszcze jednym narzędziem, którego rola polega między innymi na weryfikacji wiedzy, jaką pozyskaliśmy stosując zaprezentowane wyżej metody 2 i 3. Narzędziem tym jest *teoria testów statystycznych*.

Niech dane będzie populacja generalna będąca przedmiotem obserwacji z punktu widzenia cechy $\mathbb{X}$. Przez *hipotezę statystyczną* będziemy rozumieli każde przypuszczenie odnoszące się do rozkładu tej cechy formułowane w kategoriach bądź jakościowych–dotyczących postaci tego rozkładu, bądź ilościowych–związanych z jego parametrami. Będziemy wtedy mówili, że mamy do czynienia odpowiednio z *hipotezą nieparametryczną* albo *hipotezą parametryczną*. Podstawą do formułowania przypuszczeń na temat cechy populacji generalnej jest próba prosta. Proces weryfikacji sformułowanej hipotezy nazywamy *testem statystycznym*. Stąd też procedura testowania hipotez dzieli się na: *testy parametryczne* i *nieparametryczne*. U podstaw każdego testu znajduje się założenie, że obok hipotezy weryfikowanej, zwanej też *hipotezą zerową* i oznaczaną przez H_o, formułuje się hipotezę będącą w swojej treści wynikiem zaprzeczenia hipotezy H_o, którą nazywamy z tego powodu *hipotezą alternatywną* i oznaczamy przez H_1. Wtedy, w przypadku odrzucenia hipotezy H_o w wyniku przeprowadzonego testu, za prawdziwą uznaje się hipotezę H_1.

Jak zaznaczyliśmy wyżej, podstawą do przeprowadzenia weryfikacji hipotezy H_o przeciwko hipotezie H_1 jest próba prosta. Z teoretycznego punktu widzenia istnieje więc możliwość popełnienia błędu. Mogą zdarzyć się co najmniej dwie sytuacje: H_o jest prawdziwa albo H_o jest fałszywa. Jeśli w sytuacji pierwszej odrzucimy H_o (a więc przyjmiemy H_1), to mówimy wtedy o popełnionym *błędzie I–rodzaju*, a jego miarą jest wtedy pewna liczba α. W sytuacji drugiej, jeśli H_o przyjmujemy (a więc odrzucamy H_1), to mówimy o *błędzie II–rodzaju* i jego miarę oznaczamy przez β. Aby zrozumieć znaczenie obu zdefiniowanych błędów musimy dokładniej opisać przebieg procesu testowania hipotez.

Niech

$$(x_1, \ldots, x_n) = (\mathbb{X}_1, \ldots, \mathbb{X}_n)(\omega_o)$$

dla pewnego zdarzenia elementarnego ω_o oznacza próbę prostą naszej populacji generalnej. Wtedy

$$(x_1, \ldots, x_n) \in W = (\mathbb{X}_1, \ldots, \mathbb{X}_n)(\Omega) \subset \mathbf{R}^n,$$

co oznacza, że próba prosta jest jedną z wielu realizacji procesu obserwacji populacji generalnej, którą opisuje tutaj mnogość W. Zadaniem testu statystycznego jest skonstruowanie takiego podzbioru $Q \subset W$, że jeśli $(x_1, \ldots, x_n) \in Q$, to hipotezę H_o odrzucimy na korzyść hipotezy H_1 oraz w przypadku gdy $(x_1, \ldots, x_n) \in$

$W \setminus Q$, to H_o przyjmujemy. Z tego względu zbiór Q nazywamy *obszarem krytycznym* (mówimy też o obszarze odrzucenia), w przeciwieństwie do zbioru $W \setminus Q$ zwanego *obszarem przyjęcia* hipotezy H_o. Wtedy znaczenie ilościowe zdefiniowanych wyżej błędów α i β jest następujące:

$$\alpha = P((x_1, \ldots, x_n) \in Q | H_o), \ \beta = P((x_1, \ldots, x_n) \in W \setminus Q | H_1).$$

Z metodologicznego punktu widzenia pierwszą z powyższych równości traktuje się jako równanie z niewiadomą Q, przyjmując, że α jest małą liczbą równą zazwyczaj $0,1$ albo $0,05$. Nazywamy ją wtedy *poziomem istotności* (wtedy $1-\alpha$ nazywa się *poziomem ufności*). Testy statystyczne, które kontrolują tylko błąd I–rodzaju nazywamy *testami istotności*.

Można zapytać, co dzieje się z błędem II–rodzaju, jeśli błąd I–rodzaju został zminimalizowany. Czy on również przyjmuje minimalną wartość? Okazuje się, że tak nie jest. Jest akurat na odwrót, czyli wartości β rosną, jeśli wartości α maleją (patrz np. [19]). Wobec tego testy istotności jako metoda ignorująca z założenia kontrolę błędu II-rodzaju z jednej strony kontrolują na poziomie α odrzucenie hipotezy H_o (gdy $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in Q$), ale nie wypowiadają się na temat jej przyjęcia. Dlatego wnioskowanie w przypadku przeprowadzenia takiego testu sprowadza się do następującej konkluzji:

1. odrzucenia hipotezy H_o i przyjęcia H_1 albo

2. braku podstaw do odrzucenia hipotezy H_o.

Zaczniemy od omówienia podstaw związanych z tzw. *testami parametrycznymi* (patrz też [4], [19]). Przypuśćmy, że na podstawie próby prostej

$$(x_1 \ldots x_n) = (\mathbb{X}_1 \ldots \mathbb{X}_n)(\omega_o)$$

oraz metod opartych na pojęciu dystrybuanty empirycznej (histogramu) i teorii estymacji otrzymaliśmy następujące wyniki:

1. poznaliśmy typ rozkładu cechy $\mathbb{X}$, czyli jej dystrybuantę F, ewentualnie dysponujemy wiedzą na temat istnienia momentów tego rozkładu i parametrów, od których rozkład ten zależy,

2. zakładając, celem uproszczenia sytuacji, że rozkład F zależy od jednego parametru, powiedzmy τ, określiliśmy metodą estymacji przedziałowej jego przedział na zadanym poziomie ufności $1-\alpha$.

Pojawia się problem wyboru wartości tego parametru. Faza wstępna testu parametrycznego polega na zdefiniowaniu dwóch *hipotez*:

hipotezy zerowej $\mathbb{H}_o$ przeciwko *hipotezie alternatywnej* $\mathbb{H}_1$, gdzie

$$\mathbb{H}_o : \ \tau = \tau_o, \ \mathbb{H}_1 : \ \tau \mathcal{R} \tau_o,$$

gdzie $\tau \mathcal{R} \tau_o$ na ogół oznacza jedną z trzech relacji:

$$\tau \neq \tau_o, \quad \tau < \tau_o, \quad \tau > \tau_o.$$

Rola testu statystycznego, jak pisaliśmy wyżej, polega na tym, aby *zweryfikować* hipotezę zerową przeciwko hipotezie alternatywnej. Pozytywna weryfikacja kończy się na ogół stwierdzeniem, że *nie ma powodów do jej odrzucenia*, co nie musi oznaczać, że hipotezę zerową przyjmuje się. Zazwyczaj w tej sytuacji cały proces analizy statystycznej zaczyna się od początku, a więc od pobrania nowej próby prostej.

W przypadku negatywnej weryfikacji hipotezy zerowej albo przy aktualnych wynikach zmienia się jej treść i powtarza weryfikację albo przyjmuje się hipotezę alternatywną.

Podstawą procesu weryfikacji jest, jak pisaliśmy wyżej, *obszar krytyczny* Q, który w praktyce definiuje się jako podzbiór prostej rzeczywistej, a nie przestrzeni $\mathbf{R}^n$. Aby go wyznaczyć potrzebna jest odpowiednia statystyka $\mathbb{Z}$, czyli

$$\mathbb{Z} = f(\mathbb{X}_1 \ldots \mathbb{X}_n),$$

gdzie

$$(x_1 \ldots x_n) = (\mathbb{X}_1 \ldots \mathbb{X}_n)(\omega_o)$$

jest próbą prostą cechy $\mathbb{X}$ populacji generalnej.

Wtedy obszar Q wyznaczony jest przez warunek (patrz definicja błędu I rodzaju)

$$P(\{\omega \in \Omega : \ \mathbb{Z}(\omega) \in Q\}) = \alpha, \ \text{przy założeniu, że zaszła hipoteza } \mathbb{H}_o.$$

Jeśli teraz

$$z_{obs} = \mathbb{Z}(\omega_o) \in Q,$$

gdzie z_{obs} jest *wartością zaobserwowaną* statystyki $\mathbb{Z}$, to hipotezę $\mathbb{H}_o$ należy odrzucić na korzyść hipotezy $\mathbb{H}_1$. W przeciwnym razie mówimy, że nie ma podstaw do jej odrzucenia.

Dalej w kolejnych przykładach pokażemy sposoby konstruowania statystyki $\mathbb{Z}$ i odpowiadających jej obszarów krytycznych (patrz też [10]).

Przykład 6.4.6 *Cecha $\mathbb{X}$ populacji generalnej ma rozkład typu $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, gdzie parametr σ jest znany. Wtedy dla zweryfikowania hipotezy zerowej*

$$\mathbb{H}_o \ : \ m = m_o$$

posługujemy się styatystyką

$$\mathbb{Z} = \frac{\overline{\mathbb{X}_n} - m}{\sigma}\sqrt{n}.$$

Natomiast hipoteza alternatywna $\mathbb{H}_1$ i obszar krytyczny mają wtedy postać:

1.

$$\mathbb{H}_1 \ : \ m \neq m_o, \ Q = (-\infty, -n_\alpha) \cup (n_\alpha, \ +\infty),$$

gdzie n_α, przy założeniu hipotezy $\mathbb{H}_o$ określone jest równaniem

$$P(\{\omega \in \Omega : \mid \mathbb{Z}_o \mid (\omega) \geq n_\alpha\}) = 2(1 - \Phi(n_\alpha)) = \alpha,$$

bowiem statystyka

$$\mathbb{Z}_o = \frac{\overline{\mathbb{X}_n} - m_o}{\sigma}\sqrt{n}$$

ma przy założeniu hipotezy zerowej rozkład standardowy normalny.

2.

$$\mathbb{H}_1 \ : \ m > m_o, \ Q = (n_\alpha^+, \ +\infty)$$

gdzie n_α^+, przy założeniu hipotezy $\mathbb{H}_o$ określone jest równaniem

$$P(\{\omega \in \Omega \colon \mathbb{Z}_o(\omega) > n_\alpha^+\}) = 1 - \Phi(n_\alpha^+) = \alpha,$$

gdzie statystyka $\mathbb{Z}_o$ jest identyczna, jak w sytuacji poprzedniej.

3.

$$\mathbb{H}_1 \ : \ m < m_o, \ Q = (-\infty, \ -n_\alpha^+)$$

gdzie n_α^+ i statystyka $\mathbb{Z}_o$ są jak wyżej.

Przeprowadźmy teraz symulację liczbową. W tym celu odwołamy się do wyników z przykładu 6.4.1.

Dostaliśmy tam

$$m \in (1{,}838, \ 2{,}328), \ \overline{x_4} = 2{,}083, \ \sigma = 0{,}25, \ \alpha = 0{,}05.$$

Postawmy hipotezę zerową

$$\mathbb{H}_o : \ m = 2 \ \textit{przeciwko} \ \mathbb{H}_1 : \ m \neq 2.$$

Wtedy, przy założeniu hipotezy zerowej $n_\alpha = 1{,}96$*, i przedział krytyczny ma postać*

$$Q = (-\infty,\ -1{,}96) \cup (1{,}96,\ +\infty).$$

Tymczasem $z_{obs} = \frac{2{,}083-2}{0{,}25} = 0{,}684 \notin Q$*, co oznacza, że nie ma powodu do odrzucenia hipotezy zerowej.*

Z drugiej strony biorąc

$$\mathbb{H}_o :\ m = 1{,}9 \text{ przeciwko } \mathbb{H}_1 :\ m < 1{,}9$$

dostalibyśmy

$$\Phi(n_\alpha^+) = 1 - \alpha = 0{,}95, \text{ skąd } Q = (-\infty,\ -1{,}65).$$

Ponieważ teraz $z_{obs} = 1{,}46$*, zatem również nie ma podstaw, aby nie przyjąć* $m = 1{,}9$*.*

Okazuje się, że dopiero

$$\mathbb{H}_o :\ m = 2{,}3 \text{ przeciwko } \mathbb{H}_1 :\ m < 2{,}3$$

daje $z_{obs} = -1{,}736 \in Q = (-\infty,\ -1{,}65)$*, co oznacza, że hipotezę tę należy odrzucić. Jeśli pobrana próba była reprezentatywna, to oznacza to, że najprawdopodobnie wartość średnia cechy* $\mathbb{X}$ *jest mniejsza od 2,3.*

Przykład 6.4.7 *Cecha* $\mathbb{X}$ *populacji generalnej ma rozkład typu* $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$*, gdzie oba parametry są nieznane. Wtedy dla zweryfikowania hipotezy zerowej*

$$\mathbb{H}_o\ :\ m = m_o$$

wykorzystamy styatystykę

$$t = \frac{\overline{\mathbb{X}_n} - m}{\mathbb{S}}\sqrt{n-1}.$$

Natomiast hipoteza alternatywna $\mathbb{H}_1$ *i obszar krytyczny mają wtedy postać:*

1.

$$\mathbb{H}_1\ :\ m \neq m_o,\ Q = (-\infty, -t_\alpha) \cup (t_\alpha,\ +\infty),$$

gdzie t_α*, przy założeniu hipotezy* $\mathbb{H}_o$ *określone jest równaniem*

$$P(\{\omega \in \Omega :\ |\ t_o\ |(\omega) \geq t_\alpha\}) = \alpha,$$

bowiem statystyka

$$t_o = \frac{\overline{\mathbb{X}_n} - m_o}{\mathbb{S}}\sqrt{n-1}$$

ma przy założeniu hipotezy zerowej rozkład t–Studenta o $n-1$ *stopniach swobody.*

2.

$$\mathbb{H}_1 \ : \ m > m_o, \ Q = (t_\alpha^+, \ +\infty)$$

gdzie t_α^+, przy założeniu hipotezy $\mathbb{H}_o$ określone jest równaniem

$$P(\{\omega \in \Omega : \ t_o(\omega) \geq t_\alpha^+\}) = \alpha,$$

gdzie statystyka t_o jest identyczna, jak w sytuacji poprzedniej.

Dla przeprowadzenia symulacji odwołamy się do wyników z przykładu 6.4.2. Przypomnijmy, że wtedy

$$m \in (1{,}899, \ 2{,}267), \ \overline{x_4} = 2{,}083, \ s = 0{,}1.$$

Ponieważ z tabeli rozkładu t–Studenta dla trzech stopni swobody $t_\alpha = 3{,}182$, więc biorąc

$$\mathbb{H}_1 : \ m = 2 \textit{ przeciwko } \mathbb{H}_1 : \ m \neq 2$$

obszar krytyczny będzie miał postać

$$Q = (-\infty, \ -3{,}182) \cup (3{,}182, +\infty).$$

Tymczasem

$$t_{obs} = \frac{2{,}083 - 2}{0{,}1} 1{,}73 = 1{,}4359 \notin Q,$$

co oznacza, że nie ma powodu, aby odrzucić hipotezę zerową.

Sprawdźmy, czy dla tej próby prostej można przyjąć, że $m = 1{,}9$.

W tym celu weźmy

$$\mathbb{H}_o : \ m = 1{,}9 \textit{ przeciwko } \mathbb{H}_1 : \ m > 1{,}9.$$

Ponieważ teraz $t_\alpha^+ = 2{,}4$, to $Q = (2{,}4, \ +\infty)$.

Ale $t_{obs} = \frac{2{,}083-1{,}9}{0{,}1} 1{,}73 = 3{,}1659 \in Q$, co oznacza, że hipotezę zerową należy odrzucić.

Zauważmy, że wartość 1,9 też należy do przedziału wartości średniej wyznaczonego metodą estymacji.

Na koniec pokażemy przykładowy test dla wariancji.

Przykład 6.4.8 *Cecha $\mathbb{X}$ populacji generalnej ma rozkład typu $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, gdzie oba parametry są nieznane. Wtedy dla zweryfikowania hipotezy zerowej*

$$\mathbb{H}_o \ : \ \sigma = \sigma_o$$

wykorzystamy styatystykę

$$\chi^2 = \frac{n\mathbb{S}^2}{\sigma^2}.$$

Natomiast hipoteza alternatywna $\mathbb{H}_1$ *i obszar krytyczny mają wtedy postać:*

$$\mathbb{H}_1 \ : \ \sigma > \sigma_o, \ (\textit{ponieważ}\ \sigma > 0), \quad Q = (\chi^2_\alpha, \ +\infty),$$

gdzie przy założeniu hipotezy zerowej statystyka

$$\chi^2_o = \frac{n\mathbb{S}^2}{\sigma^2_o}$$

ma rozkład chi–kwadrat o $n-1$ *stopniach swobody, a* χ^2_α *jest rozwiązaniem równania*

$$P(\{\omega \in \Omega \ : \ \chi^2_o(\omega) > \chi^2_\alpha\}) = \alpha.$$

Stosowną symulację przeprowadzimy, wykorzystując wyniki z Przykładu 6.4.4. Dostaliśmy tam wówczas

$$\sigma^2 \in (0{,}0002, \ 0{,}267), \ s^2 = 0{,}1, \ \alpha = 0{,}1.$$

Przeprowadźmy test dla środka tego przedziału, tzn. niech

$$\mathbb{H}_o \ : \ \sigma = 0{,}366 \ \textit{przeciwko}\ \mathbb{H}_1 \ : \ \sigma > 0{,}366.$$

Ponieważ $\chi^2_\alpha = 1{,}0636$, *więc* $Q = (1{,}0636, \ +\infty)$.

Ale

$$\chi^2_{obs} = \frac{50{,}0377}{0{,}366} = 0{,}515 \notin Q,$$

co pokazuje, że nie ma powodów odrzucać takiego wyboru.

Bardzo często spotykamy się z problemem potrzeby porównania ze sobą dwóch różnych populacji generalnych. Możemy na przykład mieć do czynienia z populacją ludzi chorych i zdrowych, ludzi czynnych zawodowo i emerytów itd. Chcielibyśmy takie populacje ze sobą porównać pod kątem wyróżnionej cechy, na przykład w drugiej sytuacji może nią być preferencja wyborcza, którą oznaczymy przez $\mathbb{X}$. Zbudujemy model statystyczny dla takiej sytuacji. W modelu tym zakłada się, że na przestrzeni probabilistycznej (Ω, Σ, P) mamy dwie zmienne losowe X i Y, których rozkłady opisują cechę $\mathbb{X}$ dla populacji pierwszej i drugiej. Pobieramy materiał statystyczny z obu populacji w ten sposób, że otrzymane próby proste są stochastycznie niezależne i mają postać:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (X_1, X_2, \ldots, X_n)(\omega_o)$$

dla pierwszej populacji i

$$(y_1, y_2, \ldots, y_m) = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)(\omega_o)$$

dla populacji drugiej, gdzie

$$d(X_j) = d(X),\ d(Y_i) = d(Y)$$

dla wszystkich i oraz j. Dla uproszczenia załóżmy, że obie populacje mają rozkład normalny, czyli $X, Y \in \mathcal{N}(m_k, \sigma_k^2)$, $k = 1, 2$. Interesuje nas kwestia czy ich średnie są sobie równe, czyli czy $m_1 = m_2$? Stawiamy więc hipotezę zerową H_o: $m_1 = m_2$ przeciwko hipotezie alternatywnej H_1: $m_1 \neq m_2$. Aby wyznaczyć obszar krytyczny Q ustalamy poziom istotności α i bierzemy statystykę testową określoną wzorem

$$\mathbb{Z} = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}},$$

o ile obie wariancje są znane. Można pokazać, że przy założeniu hipotezy zerowej statystyka $\mathbb{Z}$ ma standardowy rozkład normalny (patrz np. [4]). Wtedy obszar krytyczny jest obszarem dwustronnym opisanym równaniem

$$P(\{\omega \in \Omega\colon\ \mathbb{Z}(\omega) \in Q\}) = \alpha.$$

W sytuacji kiedy wariancje nie są znane i różne, oraz długości obu prób są duże (co najmnie równe 30), to statystyka testowa ma postać

$$\mathbb{Z} = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}}},$$

gdzie S_1^2 i S_2^2 są wariancjami teoretycznymi z próby prostej dla obu populacji generalnych. Wtedy przy założeniu hipotezy zerowej statystyka $\mathbb{Z}$ ma standardowy rozkład normalny i na tej podstawie możemy wyznaczyć obszar krytyczny.

W przypadku kiedy $2 \leq n, m < 30$ i wariancje nie są znane oraz są różne, to korzystamy ze statystyki będącej modyfikacją statystyki zdefiniowanej powyżej i wyglądającej następująco

$$\mathbb{Z} = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n-1} + \frac{S_2^2}{m-1}}},$$

która przy założeniu hipotezy zerowej ma rozkład t–Studenta o s stopniach swobody, gdzie

$$s = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n-1} + \frac{S_2^2}{m-1}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n-1}\right)^2}{n-1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{m-1}\right)^2}{m-1}}.$$

Wreszcie możemy mieć do czynienia z sytuacją kiedy wariancje są jednakowe i nie są znane. Jeśli obie próby proste są duże (co najmnie liczą po 30 elementów), to dla wyznaczenia obszaru krytycznego używamy statystyki

$$\mathbb{Z} = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{nS_1^2 + mS_2^2}}\sqrt{nm},$$

która przy założeniu hipotezy zerowej też ma standardowy rozkład normalny albo w przypadku kiedy próby są krótkie (≤ 30) bierzemy

$$\mathbb{Z} = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{nS_1^2+mS_2^2}{n+m-2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}},$$

która przy założeniu hipotezy zerowej ma rozkład t–Studenta o $n+m-2$ stopniach swobody.

Przykład 6.4.9 *W dwóch losowo wybranych firmach zbadano efektywny czas pracy jej pracowników, a więc ten czas, który poświęcają na wykonywanie tylko swoich czynności przewidzianych zakresem uprawnień. W obu z badanych firm rozkład efektywnie wykorzystywanego czasu jest normalny z odchyleniem standardowym równym* $1,1$ *godzinę. Z badań wynika, że średni efektywny czas pracy w* 25*–elementowej próbie pracowników zatrudnionych w pierwszej firmie wyniósł* $6,5$ *godzin, a w* 20*–elementowej próbie wśród zatrudnionych w drugiej–*$5,9$ *godzin. Na poziomie istotności* $\alpha = 0,05$ *należy zweryfikować hipotezę, że średnie efektywne czasy pracy w obu firmach są jednakowe.*

Z założenia rozkłady X *i* Y *dla obu populacji generalnych są normalne, o wartościach oczekiwanych równych odpowiednio* m_1 *i* m_2 *oraz o jednakowych dyspersjach* $\sigma_1 = \sigma_2 = 1,1$*. Ponadto mamy dwie niezależne próby proste o liczebności* $n = 25$ *i* $m = 20$ *mniejsze od* 30*. Wykorzystamy statystykę testową postaci*

$$\mathbb{Z} = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{nS_1^2+mS_2^2}{n+m-2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}},$$

która przy założeniu hipotezy zerowej ma rozkład t–Studenta o $n + m - 2 = 43$ *stopniach swobody. Z tabeli rozkładu t–Studenta wynika, że dla przyjętego stopnia poziomu istotności* $\alpha = 0,05$

$$P(\{\omega \in \Omega \colon\ |t(\omega)| \geq t_{\alpha,m+n-2}\}) = \alpha$$

daje wartość krytyczną $t_{\alpha,m+n-2} = 2,042$ *i* $Q = (-\infty, -2,042) \cup (2,042, +\infty)$*. Z drugiej strony wartość zaobserwowana przyjętej statystyki* t_{obs} *przy założeniu* *hipotezy zerowej* H_o: $m_1 = m_2$ *wynosi*

$$t_{obs} = \frac{6,5 - 5,9}{\sqrt{\frac{25\cdot(1,1)^2 + 20\cdot(1,1)^2}{43}(0,04 + 0,05)}} \cong 1,777.$$

Ponieważ H_1: $m_1 \neq m_2$ *oraz* $t_{obs} \notin Q$*, hipoteza zweryfikowana została negatywnie, co oznacza, że nie mamy powodów do jej odrzucenia.*

Parametryczne testy istotności, jak pewnie zauważyliśmy na ogół odnoszą się do populacji normalnych. W sytuacji kiedy rozkład cechy $\mathbb{X}$ populacji generalnej jest dwumianowy, to będziemy mówili o *testach dla frekwencji.* W tym przypadku będziemy weryfikowali hipotezę zerową H_o: $p = p_o$ przeciwko hipotezie alternatywnej H_1, która może mieć jedną z trzech postaci: $p \neq p_o$, $p > p_o$, $p < p_o$. Oczywiście parametr p oznacza tutaj prawdopodobieństwo teoretyczne pojawienia się sukcesu, zwane też frekwencją. Ponieważ w metodzie stosuje się CTG, będziemy też zakładali, że pobrana próba prosta jest dostatecznie duża, czyli że $n \geq 100$. W tym przypadku statystyka testowa ma postać

$$\mathbb{Z} = \frac{\overline{\mathbb{X}_n} - p}{\sqrt{S}}\sqrt{n}.$$

Przy założeniu hipotezy zerowej, z CTG jest rozkład jest asyptotycznie standardowym rozkładem normalnym. Wtedy wartość zaobserwowaną dla próby prostej obliczymy ze wzoru

$$z_{obs} = \mathbb{Z}(\omega_o) = \frac{\frac{m}{n} - p_o}{\sqrt{\frac{p_o q_o}{n}}},$$

gdzie

$$p_o + q_o = 1, \ m \text{oznacza liczbę sukcesów.}$$

W takim razie narzędzie to pozwala nam analizować zagadnienia zasygnalizowane w przykładzie 6.2.1. Prześledzimy to na następującym przykładzie

Przykład 6.4.10 *Na jednej z uczelni zrobiono badania na temat stopnia przygotowania studentów do sesji egzaminacyjnej. W tym celu wylosowano próbę prostą złożoną ze 150 studentów i stwierdzono, że 45 spośród nich zdało wszystkie egzaminy w pierwszym terminie. Na poziomie istotności* $0,05$ *należy zweryfikować hipotezę, że mniej aniżeli trzecia część studentów zdaje na tej uczelni wszystkie egzaminy w pierwszym terminie.*

Niech $\mathbb{X}$ *oznacza cechę naszej populacji generalnej określającą liczbęzdających wszystkie egzaminy. Z założenia* $\mathbb{X} \in B(m,p)$*, gdzie* $n = 150$ *i* p *jest nieznane. Z* *trści wynika, że H_o: $p = \frac{1}{3}$ przeciwko hipotezie H_1: $p < \frac{1}{3}$. Aby zweryfikować tę hipotezę zastsujemy test dla frekwencji. Wtedy*

$$z_{obs} = \frac{\frac{45}{150} - \frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}{150}}} \cong -0,346.$$

Tymczasem lewostronny obszar krytyczny $Q^- = (-\infty, -n_\alpha)$, gdzie n_α jest rozwiązaniem równania

$$P(\{\omega \in \Omega\colon\ |\mathbb{X}|(\omega \geq n_\alpha)\}) = \alpha$$

równoważnego równaniu

$$2(1 - \Phi(n_\alpha)) = \alpha$$

dla $\alpha = 0,05$ ma postać

$$Q^- = (-\infty, -2,23).$$

Ponieważ $z_{obs} \notin Q^-$, więc wnosimy, że nie ma powodów do odrzucenia hipotesy zerowej. Należy wię przyjąć, że co najmniej trzecia część studentów badanej uczelni zdaje wszystkie egzaminy w pierwszym terminie.

Zaprezentujemy teraz podstawowe metody *nieparametrycznych testów istotności*. Na ogół testy te dotyczą trzech kwestii:

1. rozstrzygnięcia hipotezy czy rozkład cechy $\mathbb{X}$ populacji generalnej jest określonego typu F. Mówimy wtedy o tzw. *teście zgodności,*
2. zbadania, czy pobrany materiał statystyczny spełnia wymogi określone przez definicję próby prostej. Takie testy nazywamy *testami losowości,*
3. zbadanie współzależności dwóch i więcej cech tej samej populacji. Mówimy wtedy o *testach niezależności.*

Test zgodności chi–kwadrat (χ^2) Pearsona.

Niech $(x_1, \ldots, x_n) = (\mathbb{X}_1, \ldots, \mathbb{X}_n)(\omega_o)$ będzie próbą prostą cechy $\mathbb{X}$ populacji generalnej. Stawiamy hipotezę na temat nieznanego rozkładu F cechy $\mathbb{X}$ w postaci H_o: $F = F_o$, dla pewnego rozkładu F_o o k parametrach. Wtedy hipoteza alternatywna H_1 oznacza, że dystrybuanta F jest inna aniżeli F_o, czyli H_1: $F \neq F_o$. Dla celów weryfikacji hipotezy H_o ustalamy poziom istotności α (na ogół $\alpha = 0,05$) oraz za statystykę testową bierzemy *statystykę χ^2 Pearsona*, o której więcej powiemy za chwilę.

Najpierw musimy zwrócić uwagę na kilka faktów związanych ze strukturą próby prostej. Przede wszystkim należy podkreślić, że test zgodności χ^2 pearsona ma zastosowanie zarówno dla rozkładów ciągłych jak i dyskretnych. Poniżej