Zadania z Matematyki Dyskretnej

Lista 3

1. Mówimy, że relacja $\mathcal{R} \subset X \times X$ jest *przechodnia*, jeśli

$$\forall_{x,y \in X}\ (x,y) \in \mathcal{R} \iff (y,x) \notin \mathcal{R}.$$

   Pokazać, że $\mathcal{R}$ jest przechodnia $\iff \forall_{x \in X}\ (x,x) \notin \mathcal{R}$.

2. Uzasadnić, że dla relacji $\mathcal{R} \subset X \times X$ następujące warunki są równoważne:

   (a)
$$\mathcal{R} \text{ jest symetryczna.}$$

   (b)
$$\mathcal{R} \subset \mathcal{R}^{\leftarrow}.$$

   (c)
$$\mathcal{R} = \mathcal{R}^{\leftarrow}.$$

3. Wymienić znane własności relacji, jeśli:

   (a)
$$\mathcal{R} \subset \mathbf{N} \times \mathbf{N} \ i \ \forall_{n,m \in \mathbf{N}}\ n\mathcal{R}m \iff n|m.$$

   (b)
$$\mathcal{R} \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R} \ i \ \forall_{x,y \in \mathbf{R}}\ x\mathcal{R}y \iff x^2 \neq y^2.$$

4. Podać przykład relacji, która nie jest przechodnia.

5. Dla danej relacji $\mathcal{R}$ na $\{1,2,3,4\}$, gdzie $\mathcal{R} = \{(1,1),(1,3),(2,3),(3,1),(4,4)\}$ narysować odpowiadający jej graf skierowany oraz podać jej macierz sąsiedztwa.

6. Dana jest macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Opisać relację $\mathcal{R}$ taką, że $A_{\mathcal{R}} = A$.

   (b) Czy relacja ta jest przechodnia?

(c) Podać macierz relacji $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}$.

7. Zbadać, czy podane niżej relacje są relacjami równoważności. Jeśli tak, to wyznaczyć ich klasy abstrakcji.

   (a)
   $$x\mathcal{R}y \iff x^2 \leq y^2,\ (x, y \in \mathbf{R}).$$

   (b)
   $$x\mathcal{R}y \iff 4|x^2 - y^2,\ x, y \in \{1, 2, \ldots, 16\}.$$

   (c)
   $$A\mathcal{R}B \iff \exists_{k \in \mathbf{R}}\ A - B = kI_2,\ A, B \in \mathbb{M}_{2\times 2}.$$

   (d)
   $$n\mathcal{R}m \iff p|n - m,\ n, m \in \mathbf{N},\ \textit{dla pewnego naturalnego}\ p \geq 2.$$

8. Płaszczyznę $\mathbf{R}^2$ dzielimy na zbiory będące okręgami o środku w początku układu współrzędnych. Znaleźć relację $\mathcal{R}$, dla której klasami abstrakcji są te zbiory.

9. O relacjach $\mathcal{R}_1$ i $\mathcal{R}_2$ wiadomo, że ich macierze sąsiedztwa mają postać:
   $$A_{\mathcal{R}_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$
   $$A_{\mathcal{R}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
   Narysować grafy relacji: $\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$ i $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$. Wyznaczyć macierze sąsiedztwa tych relacji.

10. Skonstruować tabele dla działań: $\oplus_7$ i $\odot_7$.

11. Uzasadnić, że relacja $\preceq_n$ określona następująco
    $$\forall_{s_1, s_2 \in \mathcal{S}(A)}\ s_1 \preceq_n s_2 \iff \text{słowo } s_1 \text{ jest współpoczątkowe ze słowem } s_2,$$
    czyli
    $$s_1 \preceq_n s_2 \iff \exists_{s \in \mathcal{S}(A)}\ (\text{być może } \lambda)\ s_1 s = s_2.$$
    jest częściowym porządkiem na $S(A)$, ale nie jest porządkiem.

12. Uzasadnić, że relacja $\preceq_s$ porzcadku standardowego jest porządkiem.

13. Wyjaśnić różnice pomiędzy relacjami $\preceq_n$, $\preceq_s$, $\preceq_L$.

14. Pokazać, że każdy skończony zbiór można dobrze uporządkować.

15. Weźmy rodzinę $\mathcal{P}(X)$ z relacją $\subset$. Uzasadnić, że

    (a) $\subset$ jest częściowym porządkiem.

    (b) $\subset$ nie jest porządkiem.

    Znaleźć element najmniejszy i największy w $\mathcal{P}(X)$.

16. Czy na niepustym zbiorze można zdefiniować relację, która jednocześnie będzie częściowym porządkiem i relacją równoważności?

17. Niech $A = \{1, 2, \ldots, 8\}$ z relacją $\mathcal{R}$ taką, że $n\mathcal{R}m \iff m|n$. Narysować graf tej relacji oraz graf Hassego.

18. Weźmy zbiór $\mathbf{R}$ z relacją $\leq$. Czy $(\mathbf{R}, \leq)$ jest kratą? Jeśli tak, to jak wyglądają działania kratowe $x \vee y$ i $x \wedge y$?

10.03.2008
dr Ryszard Rębowski