Zadania z Matematyki Dyskretnej

Lista 5

1. Niech $X = \{0, 1\}$, gdzie 0 i 1 oznaczają wartości logiczne fałszu i prawdy. Uzasadnić, że $(X, \vee, \wedge, \tilde{})$ jest algebrą Boolea.

2. Niech L będzie kratą z elemntem najmniejszym i największym. Pokazać, że
$$sup\{x, y\} \ i \ inf\{x, y\}$$
definiują działania booleowskie na L.

3. Uzasadnić, że dla $A \neq \emptyset$
$$\left(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, ^c\right)$$
jest algebrą Boolea.

4. Pokazć, że $X = \{0, 1\}^n$, $n \geq 2$, gdzie $\{0, 1\}$ ma znaczenie jak w zadaniu 1 jest algebrą Boolea.

5. Udowodnić, że w każdej algebrze Boole'a zachodzą prawa: *idempotentności, identyfikacji, pochłaniania, de Morgana, porządku.*

6. Sprawdzić, że relacja $\preceq$ określona na algebrze Boolea
$$x \preceq y \iff x \vee y = y$$
jest częściowym porządkiem.

7. Uzasadnić, że w dowolnej algebrze Boolea zachodzi równoważność
$$x \vee y = y \iff x \wedge y = x.$$

8. Wykazać, że dla algebry $\mathcal{P}(A)$ odpowiednikiem relacji $\preceq$ jest relacja inkluzji $\subseteq$.

9. Niech $\mathbb{A}$ oznacza algebrę Boolea z relacją $\preceq$. Pokazać, że $inf\{x, y\} = x \wedge y$.

10. Weźmy dwie algebry
$$\mathbb{A}_1 = \{0, 1\}^n \ oraz \ \mathbb{A}_2 = \mathcal{P}(A), \ |A| = n.$$
Sprawdzić, czy algebry te są izomorficzne.

11. Przypuśćmy, że dla dwóch algebr mamy $\mathbb{A}_1 \simeq \mathbb{A}_2$ z izomorfizmem $\mathbf{i}$. Pokazać, że
$$\mathbf{i}(0_1) = 0_2 \ oraz \ \mathbf{i}(1_1) = 1_2,$$
gdzie $0_i, 1_i$ oznaczają elementy wyróżnione tych algebr.

12. Opisać wszystkie atomy algebry $\{0,1\}^n$.

13. Pokazać, że niezerowy element $a \in \mathbb{A}$ jest atomem $\Longleftrightarrow$ nie istnieje $b \in \mathbb{A}$ takie, że $0 < b < a$.

14. Niech
$$w = f(x,y,z) = \Big(\tilde{x} \wedge (\tilde{y} \vee z)\Big) \wedge y \wedge \tilde{z}.$$
Korzystając z rachunku opartego na aksjomatyce algebry Boolea skonstruować postać kanoniczną wyrażenia booleowskiego w. Wyznaczyć tę postać wykorzystując technikę funkcji booleowskich.

15. Narysować tabelą Karnaugha dla wyrażeń:

    (a)
    $$w = (\tilde{y} \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z),$$

    (b)
    $$w = (y \,\widetilde{\vee\, x \wedge}\, z).$$

16. Narysować tabele Karnaugha dla danych wyrażeń i pokazać, że są one optymalne

    (a)
    $$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$$

    (b)
    $$\tilde{x} \vee (y \wedge z \wedge t).$$

17. Pokazać, że symbolom atomowym $b, c, \tilde{b}, \tilde{c}$ odpowiadają tablice Karnaugha z blokami typu 2×2.

18. Dana jest sieć logiczna jak na rysunku 1. Opisać ją w języku algebry Boolea. Dokonać jej optymalizacji.

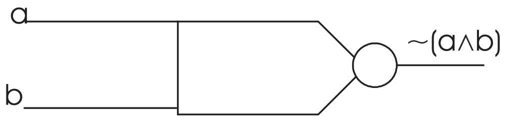

Figure 1: rysunek sieci

28.05.2008
dr Ryszard Rębowski