

Zadania z Matematyki Dyskretnej

Lista 3

1. Mówimy, że relacja $\mathcal{R} \subset X \times X$ jest *przechodnia*, jeśli

$$\forall_{x,y \in X} (x,y) \in \mathcal{R} \iff (y,x) \notin \mathcal{R}.$$

Pokazać, że \mathcal{R} jest przechodnia $\iff \forall_{x \in X} (x,x) \notin \mathcal{R}$.

2. Uzasadnić, że dla relacji $\mathcal{R} \subset X \times X$ następujące warunki są równoważne:

(a)

\mathcal{R} jest symetryczna.

(b)

$$\mathcal{R} \subset \mathcal{R}^{-1}.$$

(c)

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}.$$

3. Wymienić znane własności relacji, jeśli:

(a)

$$\mathcal{R} \subset \mathbf{N} \times \mathbf{N} \text{ i } \forall_{n,m \in \mathbf{N}} n\mathcal{R}m \iff n|m.$$

(b)

$$\mathcal{R} \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R} \text{ i } \forall_{x,y \in \mathbf{R}} x\mathcal{R}y \iff x^2 \neq y^2.$$

4. Podać przykład relacji, która nie jest przechodnia.

5. Dla danej relacji \mathcal{R} na $\{1, 2, 3, 4\}$, gdzie $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 1), (4, 4)\}$ narysować odpowiadający jej graf skierowany oraz podać jej macierz sąsiedztwa.

6. Dana jest macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Opisać relację \mathcal{R} taką, że $A_{\mathcal{R}} = A$.

(b) Czy relacja ta jest przechodnia?

- (c) Podać macierz relacji $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}$.
7. Zbadać, czy podane niżej relacje są relacjami równoważności. Jeśli tak, to wyznaczyć ich klasy abstrakcji.

(a)

$$x\mathcal{R}y \iff x^2 \leq y^2, (x, y \in \mathbf{R}).$$

(b)

$$x\mathcal{R}y \iff 4|x^2 - y^2|, x, y \in \{1, 2, \dots, 16\}.$$

(c)

$$A\mathcal{R}B \iff \exists_{k \in \mathbf{R}} A - B = kI_2, A, B \in \mathbb{M}_{2 \times 2}.$$

(d)

$$n\mathcal{R}m \iff p|n - m, n, m \in \mathbf{N}, \text{ dla pewnego naturalnego } p \geq 2.$$

8. Płaszczyznę \mathbf{R}^2 dzielimy na zbiory będące okręgami o środku w początku układu współrzędnych. Znaleźć relację \mathcal{R} , dla której klasami abstrakcji są te zbiory.
9. O relacjach \mathcal{R}_1 i \mathcal{R}_2 wiadomo, że ich macierze sąsiedztwa mają postać:

$$A_{\mathcal{R}_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{\mathcal{R}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Narysować grafy relacji: $\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$ i $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$. Wyznaczyć macierze sąsiedztwa tych relacji.

10. Skonstruować tabele dla działań: \oplus_7 i \odot_7 .

11. Uzasadnić, że relacja \preceq_n określona następująco

$$\forall_{s_1, s_2 \in \mathcal{S}(A)} s_1 \preceq_n s_2 \iff \text{słowo } s_1 \text{ jest współpoczątkowe ze słowem } s_2,$$

czyli

$$s_1 \preceq_n s_2 \iff \exists_{s \in \mathcal{S}(A)} (\text{być może } \lambda) s_1 s = s_2.$$

jest częściowym porządkiem na $\mathcal{S}(A)$, ale nie jest porządkiem.

12. Uzasadnić, że relacja \preceq_s porządku standardowego jest porządkiem.
13. Wyjaśnić różnice pomiędzy relacjami \preceq_n , \preceq_s , \preceq_L .
14. Pokazać, że każdy skończony zbiór można dobrze uporządkować.
15. Weźmy rodzinę $\mathcal{P}(X)$ z relacją \subset . Uzasadnić, że
 - (a) \subset jest częściowym porządkiem.
 - (b) \subset nie jest porządkiem.Znaleźć element najmniejszy i największy w $\mathcal{P}(X)$.
16. Czy na niepustym zbiorze można zdefiniować relację, która jednocześnie będzie częściowym porządkiem i relacją równoważności?
17. Niech $A = \{1, 2, \dots, 8\}$ z relacją \mathcal{R} taką, że $n\mathcal{R}m \iff m|n$. Narysować graf tej relacji oraz graf Hassego.
18. Weźmy zbiór \mathbf{R} z relacją \leq . Czy (\mathbf{R}, \leq) jest kratą? Jeśli tak, to jak wyglądają działania kratowe $x \vee y$ i $x \wedge y$?

26.03.2008

dr Ryszard Rębowski