Zadania z Matematyki Dyskretnej

Lista 4

1. Pokazać, że funkcja l zdefiniowanana wzorem $\mathcal{P}(X) \ni A \to l(A) = |A|$ ma następujące własności:

   (a)
   $$A \subset B \Rightarrow l(A) \leq l(B).$$

   (b)
   $$A \subset B \Rightarrow l(B \setminus A) = l(B) - l(A).$$

2. Podać zasadę konstrukcji funkcji odwrotnej do f na podstawie znajomości wykresu funkcji f.

3. Uzasadnić, że wykres funkcji jest relacją.

4. Przeprowadzić brakujące dowody Faktu o wasnoci obrazu i przeciwobrazu podanego na wykadzie.

5. Wyprowadzić metodą ZIM wzór na $f^{(n)}$ dla funkcji $f(x) = ax + b$.

6. Pokazać, że funkcja odwrotna do funkcji rosnącej (malejącej) jest funkcją rosnącą (malejącą).

7. Przedyskutować monotoniczność i ograniczoność ciągu arytmetycznego i geometrycznego.

8. Dlaczego ciąg naprzemienny nie jest zbieżny?

9. Wykorzystując ZIM udowodnić, że $|P_n| = n!$.

10. Wyznaczyć liczbę Stirlinga $S(6, 3)$. Podać jej kombinatoryczną interpretację.

11. Przeprowadzić algorytm dla zagadnienia wież Hanoi dla przypadku 5 dysków.

12. Przeprowadzić pełny dowód Twierdzenia o rekurencji II stopnia.

13. Niech (f_n) oznacza ciąg liczb Fibonacciego. Znaleźć dwoma sposobami liczbę f_{31}.

14. Stosując ZIM pokazać, że
    $$\forall_{k\geq 1}\ f_n | f_{kn}.$$

15. Pokazać, że
$$f_n = 1 + \sum_{j=0}^{n-2} f_j, \ dla\ n \geq 2.$$

16. Uzasadnić, że dwie sąsiednie liczby Fibonacciego są względnie pierwsze.

17. Wyreprezentować liczbę 277 w układzie pozycyjnym Fibonacciego.

18. Jak wiadomo dla liczb Fibonacciego zachodzi tożsamość Cassiniego
$$f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n.$$
W szczególnośći mamy
$$f_7 f_5 - f_6^2 = 1,$$
czyli $13 \star 5 - 8^2 = 1$. Weźmy kwadrat o boku 8 złożony z 64 mniejszych kwadratów (jednostek) i podzielmy go jak na rysunku 4.1 na cztery figury o wymiarach: f_6, f_5 i f_4.

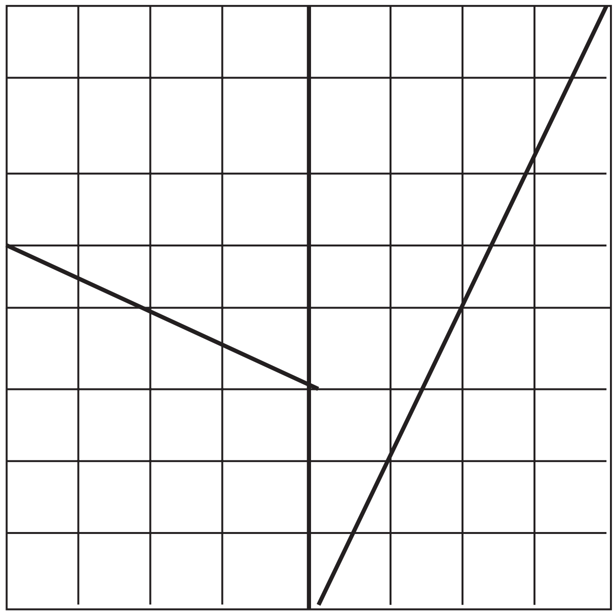

Figure 1: kwadrat o boku 8 podzielony na cztery figury

Złóżmy z tych czterech figur prostokąt jak na rysunku 4.2. Będzie on miał wtedy wymiary: $f_7 \times f_5 = 65$. Zaistniałą sytuację nazywamy *paradoksem Cassiniego*. Wyjaśnić przyczynę pojawienia się dodatkowej jednostki.

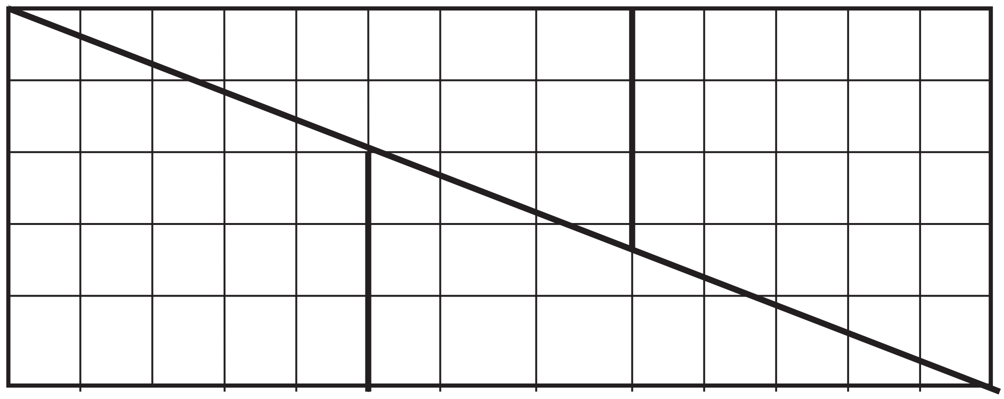

Figure 2: prostokąt o bokach 13×5 powstały ze sklejenia 4 figur

19. Uzasadnić, że

$$\frac{6x^2}{(1-2x)(1+x)} = 2x^2\Big(\frac{2}{1-2x} + \frac{1}{1+x}\Big).$$

20. Stosując pojęcie liczby Cantala obliczyć na ile sposobów można podzielić wielokąt wypukły mający $n+2$ krawędzie na różne trójkąty za pomocą przekątnych.

21. Uzasadnić, że

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 2^j = 3^n \ dla\ n \in \mathbf{N}.$$

22. Dany jest zbiór $X = \{1, 2, 3, 4\}$.
    (a) Wypisać wszystkie elementy rodziny C_4^3.
    (b) Wypisać wszystkie ciągi zbioru P_4.
    (c) Wypisać wszystkie elementy zbioru W_4^2.
    (d) Wypisać wszystkie elementy zbioru V_4^2.

(e) Wypisać wszystkie 3-elemntowe kombinacje z powtórzeniami zbiory X.

23. Ile jest wszystkich rozwiązań równania

$$x + y + z = 15, \ x, y, z \in \mathbf{N}.$$

porównać ten wynik z liczbą rozwiązań tego równania, jeśli $x, y, z \in \mathbf{N} \cup \{0\}$.

24. Dany jest zbiór $X = \{1, 2, \ldots, 8\}$. Skonstruować wszystkie partycje X złożone z czterech dwuelementowych podzbiorów. Ile jest takich partycji?

25. W turnieju tenisa ziemnego startuje 24 zawodników. Zakładając, że przez eliminacje tego turnieju rozumiemy rozstawienie uczestników w pary obliczyć na ile sposobów można przeprowadzić takie eliminacje.

26. Na ile sposobów grupę złożoną z 21 osób można podzielić na: 3 podgrupy 4 osobowe, 1 podgrupę 3 osobową i 2 podgrupy 3 osobowe?

27. Pokazać, że jeśli A jest 10-elementowym podzbiorem zbioru $\{1, 2, \ldots, 50\}$, to znajdą się dwa podzbiory w A, że ich arytmetyczne sumy będą sobie równe.

28. Przeprowadzić procedurę ,,włączania-wyłączania" dla rodziny 4 elementowej.

29. W grupie 35 osób jest 17 palących oraz 21 osób w wieku co najmniej 18 lat. Ilu spośród palących ma co najmniej 18 lat?

30. Na ławce usiadło obok siebie 10 osób. Osoby te zamieniły się miejscami. Opisać to zjawisko w terminach kombinatoryki oraz dokonać jego zliczenia.

31. Ciąg (a_n) dany jest wzorem

$$a_0 = a_1 = 1, \ a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}, \ n \geq 2.$$

(a) Obliczyć a_8 metodą iteracyjną.

(b) Rozwiązać tę rekurencję metodą funkcji charakterystycznej.

(c) Zbadać parzystość wyrazów a_n.

32. Dla ciągu (a_n), gdzie $a_0 = 3, \ a_n = -2a_{n-1}, \ n \geq 1$ napisać jego funkcję tworzącą, a następnie rozwiązać tę rekurencję.

33. Sprawdzić, że ciąg $a_n = 3^n - 2n3^n$ ma następujące własności:

$$a_0 = 1, \ a_1 = -3, \ a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}.$$

18.04.2008

dr Ryszard Rębowski