

Zadania z Matematyki Dyskretnej

Lista 5

1. Niech $X = \{0, 1\}$, gdzie 0 i 1 oznaczają wartości logiczne fałszu i prawdy. Uzasadnić, że (X, \vee, \wedge, \neg) jest algebrą Boolea.

2. Niech L będzie kratą z elementem najmniejszym i największym. Pokazać, że

$$\sup\{x, y\} \text{ i } \inf\{x, y\}$$

definiują działania booleowskie na L .

3. Uzasadnić, że dla $A \neq \emptyset$

$$(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, ^c)$$

jest algebrą Boolea.

4. Pokazać, że $X = \{0, 1\}^n$, $n \geq 2$, gdzie $\{0, 1\}$ ma znaczenie jak w zadaniu 1 jest algebrą Boolea.

5. Udowodnić, że w każdej algebrze Boole'a zachodzą prawa: *idempotentności, identyfikacji, pochłaniania, de Morgana, porządku*.

6. Sprawdzić, że relacja \preceq określona na algebrze Boolea

$$x \preceq y \iff x \vee y = y$$

jest częściowym porządkiem.

7. Uzasadnić, że w dowolnej algebrze Boolea zachodzi równoważność

$$x \vee y = y \iff x \wedge y = x.$$

8. Wykazać, że dla algebry $\mathcal{P}(A)$ odpowiednikiem relacji \preceq jest relacja inkluzji \subseteq .

9. Niech \mathbb{A} oznacza algebrę Boolea z relacją \preceq . Pokazać, że $\inf\{x, y\} = x \wedge y$.

10. Weźmy dwie algebry

$$\mathbb{A}_1 = \{0, 1\}^n \text{ oraz } \mathbb{A}_2 = \mathcal{P}(A), \quad |A| = n.$$

Sprawdzić, czy algebry te są izomorficzne.

11. Przypuśćmy, że dla dwóch algebr mamy $\mathbb{A}_1 \simeq \mathbb{A}_2$ z izomorfizmem \mathbf{i} . Pokazać, że

$$\mathbf{i}(0_1) = 0_2 \text{ oraz } \mathbf{i}(1_1) = 1_2,$$

gdzie $0_i, 1_i$ oznaczają elementy wyróżnione tych algebr.

12. Opisać wszystkie atomy algebry $\{0, 1\}^n$.
13. Pokazać, że niezerowy element $a \in \mathbb{A}$ jest atomem \iff nie istnieje $b \in \mathbb{A}$ takie, że $0 < b < a$.

14. Niech

$$w = f(x, y, z) = (\tilde{x} \wedge (\tilde{y} \vee z)) \wedge y \wedge \tilde{z}.$$

Korzystając z rachunku opartego na aksjomatyce algebry Boolea skonstruować postać kanoniczną wyrażenia booleowskiego w . Wyznaczyć tę postać wykorzystując technikę funkcji booleowskich.

15. Narysować tabelą Karnaugh dla wyrażeń:

(a)

$$w = (\tilde{y} \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z),$$

(b)

$$w = \widetilde{(y \vee x \wedge z)}.$$

16. Narysować tabele Karnaugh dla danych wyrażeń i pokazać, że są one optymalne

(a)

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$$

(b)

$$\tilde{x} \vee (y \wedge z \wedge t).$$

17. Pokazać, że symbolom atomowym $b, c, \tilde{b}, \tilde{c}$ odpowiadają tablice Karnaugh z blokami typu 2×2 .
18. Dana jest sieć logiczna jak na rysunku 1. Opisać ją w języku algebry Boolea. Dokonać jej optymalizacji.



Figure 1: rysunek sieci

28.05.2008
dr Ryszard Rębowski