

Zadania z metod probabilistycznych

Lista 3

1. Niech (Ω, Σ, P) będzie przestrzenią probabilistyczną. Uzasadnić, że rodzina $\tilde{\Sigma} = \{A \in \Sigma : P(A) \in \{0, 1\}\}$ jest σ -ciałem.
2. Dane są trzy zdarzenia A_1, A_2, A_3 . Korzystając z własności łączności sumy mnogościowej i wzoru podanego na wykładzie obliczyć $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$.
3. Uzasadnić, że wzór $\tilde{P}(\tilde{A}) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, dla $\tilde{A} \in \Sigma_B$ określa funkcję prawdopodobieństwa na σ -ciele warunkowym Σ_B .
4. Kiedy dla zdarzeń $A, B \in \Sigma$ zachodzi równość

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

5. Pokazać, że

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^c\right)$$

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = 1 - P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k^c\right)$$

6. W urnie jest pewna ilość $m \geq k$ kul czerwonych i $n \geq k$ kul białych. Doświadczenie polega na losowaniu k kul. Wykorzystując pojęcie modelu dyskretnego jednorodnego opisać przypadek :
 - losowania kul bez zwracania
 - losowania kul ze zwracaniem

Dla każdego z przypadków obliczyć prawdopodobieństwo wylosowania k kul białych.

7. Z talii 52 kart losujemy 5. Niech :
 - A oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu 3 asów
 - B oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu co najmniej jednego asa
 - C oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu co najmniej jednego asa czarnego.

Czy zdarzenia te są parami stochastycznie niezależne ?

8. Gracz dostał 13 kart z talii 52 kart. Obejrzał 7 z nich i stwierdził, że nie ma wśród nich asa. Jakie jest prawdopodobieństwo, że gracz ma jednego asa.
9. Z talii 52 kart losujemy 9. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych kart będą karty czerwone i czarne.
10. Jakie jest prawdopodobieństwo, że spośród 10 osób siedzących obok siebie na ławce, wybrane 3 osoby z nich usiądą obok siebie.
11. Mamy alfabet złożony z n symboli. Spośród wszystkich słów długości $k < n$ wylosowano słowo złożone z różnych symboli. Obliczyć prawdopodobieństwo tego zdarzenia.

Uwaga : w zadaniach 6–11 należy opisać przestrzenie zdarzeń elementarnych.

29.09.2007
dr Ryszard Rębowski