Podstawy Symulacji Komputerowej
Lista 0

Ryszard Rębowski*

18 lutego 2020

1. Niech (Ω, Σ, P) oznacza model Kołmogorowa. Pokazać, że dla $A, B \in \Sigma$:

   (a)
   $$A \cup B = A \cup (A^c \cap B),$$
   $$B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B).$$

   (b)
   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

2. Wiadomo, że dla zmiennej losowej $\mathbf{X}$ mamy:

   $$\mathbf{X}(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}, \;\; P(\{\omega \in \Omega \colon \mathbf{X}(\omega) = i\}) = ic, \;\text{dla pewnej}\; c \in \mathbf{R}.$$

   Obliczyć dwoma metodami $P(\{\omega \in \Omega \colon \;\, 2 \leqslant \mathbf{X}(\omega) \leqslant 3\})$.

3. Zmienna losowa $\mathbf{X}$ ma gęstość

   $$f(t) = ct, \;\; t \in (0, 1), \;\; f(t) = 0, t \notin (0, 1).$$

   Wyznaczyć funkcję dystrybuanty, a następnie dwoma metodami obliczyć $P(\{\omega \in \Omega \colon \;\, \mathbf{X}(\omega) > 0,5\})$.

4. Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję dla zmiennych losowych z zadania 2 i 3.

5. Pokazać, że
   $$var(a\mathbf{X} + b) = a^2 var(\mathbf{X}).$$

6. Wiadomo, że $\mathbf{X} \in B(n, p)$, $\mathbf{Y} \in B(m, p)$ oraz $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ są stochastycznie niezależne. Uzasadnić, że $\mathbf{X} + \mathbf{Y} \in B(n + m, p)$.

*Wydział Nauk Technicznych i Ekonomicznych Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej im. Witelona w Legnicy, e–mail: rebowskir@pwsz-legnica.eu

7. Wiadomo, że $\mathbf{X} \in B(n,p)$. Uzasadnić, że

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega \colon \frac{\mathbf{X}(\omega) - np}{\sqrt{np(1-p)}} < t\right\}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

   dla dużych n.

8. Dana jest macierz $\mathbf{P} \in M_{2x2}$. Kiedy $\mathbf{P}$ jest macierzą rozkładu pewnego dwuwymiarowego wektora losowego? Kiedy zmienne losowe reprezentujące ten wektor są stochastycznie niezależne?

9. Dana jest macierz $\mathbf{P}$ reprezentująca rozkład łączny wektora losowego $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, gdzie:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 \end{bmatrix}$$

   oraz

$$\mathbf{X}(\Omega) = \{1,2\},\ \mathbf{Y}(\Omega) = \{3,2,1\}.$$

   Obliczyć:

   (a) $cov(X,Y)$.

   (b) $\rho_{(X,Y)}$.

   (c) Sprawdzić, czy zmienne losowe $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ są stochastycznie niezależne.

   (d) Sprawdzić, czy zmienne losowe $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ są liniowo zależne.