

## Lista 1 – ciągi liczbowe i ich granice

1.1. Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic ciągów oblicz granice:

- (a)  $\lim \frac{n^2+4n-1}{3n^3+2n^2-4}$ ;
- (b)  $\lim \frac{2n^3+3n^2+n+7}{n^2+8n+5}$ ;
- (c)  $\lim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$ ;
- (d)  $\lim (\sqrt{n^2-4} - \sqrt{n^2-3})$ .

1.2. Korzystając z twierdzenia o ciągach z granicą  $e$  oblicz granice:

- (a)  $\lim \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{3n}$  ;
- (b)  $\lim \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{2n+1}$  ;
- (c)  $\lim \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{2n}$  .

1.3. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach oblicz granice:

- (a)  $\lim \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n}$ ;
- (b)  $\lim \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n}$ ;
- (c)  $\lim \frac{(-1)^n}{n+1}$ .

1.4. Korzystając z twierdzenia o dwóch ciągach oblicz granice:

- (a)  $\lim [(-1)^n - 4^n]$ ;
- (b)  $\lim [3 + \sin n]^n$ ;
- (c)  $\lim \sqrt[2n]{(n+2)^{2n} + 1}$ .

## Lista 2 – granica i ciągłość funkcji

2.1. Korzystając z twierdzeń o granicach funkcji oblicz granice:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^5 + 3x^4 - 2x^2 - 7x - 1}{4x^5 + 6x^3 - 19x + 6}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sin x - e^x)$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 + 3x^4 - 2x^2 - 7x - 1}{4x^5 + 6x^3 - 19x + 6}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^4}{x^2|x|}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cos x$$

2.2. Dobierz współczynniki  $a, b \in \mathbb{R}$  tak, aby funkcja  $f$  była ciągła, jeśli

$$(a) f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + 1 & \text{gdy } x < 1 \\ a & \text{gdy } x = 1 \\ x + 2 & \text{gdy } x > 1 \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} \frac{a \sin x}{x} & \text{gdy } x < 0 \\ b + 1 & \text{gdy } x = 0 \\ x - a - 1 & \text{gdy } x > 0 \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} a(x^2 + 3x + 1) & \text{gdy } x < 1 \\ 5 & \text{gdy } x = 1 \\ b(3^x + 2) & \text{gdy } x > 1 \end{cases}$$

$$(d) f(x) = \begin{cases} a(2^x + 3) & \text{gdy } x < 2 \\ 7 & \text{gdy } x = 2 \\ b(2x^2 - x + 1) & \text{gdy } x > 2 \end{cases}$$

## Lista 3 – pochodne funkcji

**3.1.** Korzystając z odpowiednich reguł różniczkowania oblicz pochodne następujących funkcji:

(a)  $f(x) = \left(e^x + \frac{1}{x}\right) x^3;$

(b)  $f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 5}{x^3 + 2};$

(c)  $f(x) = \frac{\cos x - \ln x}{x^2 + 4};$

(d)  $f(x) = \ln \operatorname{tg} x;$

(e)  $f(x) = \sqrt{\frac{3-x}{2x+1}}.$

**3.2.** Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji  $f$  w punkcie  $(x_0, f(x_0))$ , jeśli:

(a)  $f(x) = x^2 + 3x + 7, \quad x_0 = 1;$

(b)  $f(x) = 2x^2 - 3x - 7, \quad x_0 = 2;$

(c)  $f(x) = e^x, \quad x_0 = 0.$

**3.3.** Korzystając z reguł de L'Hospitala oblicz granice wyrażeń nieoznaczonych:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10};$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin 5x};$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^x}{x};$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}, \quad \text{gdzie } a > 0;$

(e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x};$

(f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x};$

(g)\*  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$

## Lista 4 – rachunek różniczkowy

4.1. Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji:

(a)  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x - 72$ ;

(b)  $f(x) = \frac{1}{2x - x^2}$ ;

(c)  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{x - 3}$ ;

(d)  $f(x) = x \ln x$ .

4.2. Wyznacz ekstrema globalne podanych funkcji na wskazanych przedziałach:

(a)  $f(x) = x^3 - 3x$ ,  $[-2, 4]$ ;

(b)  $f(x) = x - 2\sqrt{x}$ ,  $[0, 5]$ ;

(c)  $f(x) = 2 \sin x + \sin 2x$ ,  $[0, \frac{3\pi}{2}]$ ;

(d)  $f(x) = \frac{x^2}{3 + x}$ ,  $[-1, 4]$ .

4.3. Określ przedziały wypukłości i punkty przegięcia następujących funkcji:

(a)  $f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x + 15$ ;

(b)  $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ ;

(c)  $f(x) = xe^x$ ;

(d)  $f(x) = x - 2 \ln x$ .

## Lista 5 – całki nieoznaczone

5.1. Korzystając z liniowości całki nieoznaczonej oblicz podane całki:

(a)  $\int (5x^3 + 2x^2 - 4x + 8) dx$ ;

(b)  $\int \left( 3\sqrt{x^3} + \frac{1}{x^2} - x\sqrt{x} \right) dx$ ;

(c)  $\int \frac{x^4}{x^2 + 1} dx$ .

5.2. Całkując przez części oblicz podane całki:

(a)  $\int x \sin x dx$ ;

(b)  $\int x^2 e^x dx$ ;

(c)  $\int e^x \cos x dx$ ;

(d)  $\int \sqrt{x} \ln x dx$ ;

(e)  $\int x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x dx$ .

5.3. Całkując przez podstawienie oblicz podane całki:

(a)  $\int (x^2 + 4)^5 x dx$ ;

(b)  $\int \frac{\ln x}{x} dx$ ;

(c)  $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ ;

(d)  $\int (2x - 1) \sqrt{x^2 - x + 1} dx$ ;

(e)  $\int \frac{x^2}{\cos^2(x^3 + 1)} dx$ .

## Lista 6 – całki oznaczone

**6.1.** Korzystając z tw. Newtona–Leibniza oblicz podane całki oznaczone:

$$(a) \int_1^5 (5x^3 + 2x^2 - 4x + 8) dx;$$

$$(b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx;$$

$$(c) \int_0^2 (x^2 + 4)^5 x dx.$$

**6.2.** Korzystając z tw. o całkowaniu przez części dla całki oznaczonej oblicz podane całki oznaczone:

$$(a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx;$$

$$(b) \int_0^1 x^2 e^x dx;$$

$$(c) \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos x dx.$$

**6.3.** Korzystając z tw. o całkowaniu przez podstawienie dla całki oznaczonej oblicz podane całki oznaczone:

$$(a) \int_0^2 (x^2 + 4)^5 x dx;$$

$$(b) \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx;$$

$$(c) \int_1^4 \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$$

**6.4.** Oblicz pole obszaru  $D$  ograniczonego:

(a) wykresami funkcji  $y = x^2$  oraz  $y = 2x + 3$ ;

(b) wykresami funkcji  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ , osią  $Oy$  ( $x \geq 0$ ) oraz prostą  $x = \frac{3\pi}{2}$ .

## Lista 7 – elementy rachunku różniczkowego funkcji wielu zmiennych

7.1. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji:

- (a)  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy$ ;
- (b)  $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 6y - 4x + 2$ ;
- (c)  $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + 5x^2 + y^2 - 4xy$ ;
- (d)  $f(x, y) = x^2 + y^3 - 6xy - 48y$ ;
- (e)  $f(x, y) = 3x^2 + 3x^2y + y^3 - 15x$ ;
- (f)  $f(x, y) = x^4 + 7x^2 + y^2 - 6xy + 3$ ;
- (g)  $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 4x - 6y$ ;
- (h)  $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 3$ ;
- (i)  $f(x, y) = 3x^2 - x^3y^2 + y^2 - 3x$ ;
- (j)  $f(x, y) = (2x - 5)^2 + 3y^2$ ;
- (k)  $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 4x - 4y$ ;
- (l)  $f(x, y) = x^3 - 3x^2 + y^2 - 4xy$ .

7.2. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji:

- (a)  $f(x, y) = x + \frac{y^2}{4x}$ ;
- (b)  $f(x, y) = 4xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ ;
- (c)  $f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$ ;
- (d)  $f(x, y) = xe^{x^2y}$ ;
- (e)  $f(x, y) = (2x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$ ;
- (f)  $f(x, y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$ .