Lista 0 – wstęp do matematyki [1]

0.1. Sprawdź, czy następujące zdania logiczne są tautologiami:

(a) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$;

(b) $(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$;

(c) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$;

(d) $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$.

0.2. Uzasadnij, że funktory alternatywy i koniunkcji mają własność łączności oraz przemienności. Czy tak jest w przypadku funktora implikacji?

0.3. Przy pomocy kwantyfikatorów i form zdaniowych zapisz zdania:

(a) Nieprawda, że każda liczba naturalna jest liczbą parzystą.

(b) Dla dowolnej liczby rzeczywistej istnieje liczba całkowita od niej mniejsza.

(c) Kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną.

0.4. Podaj różne definicje zbiorów:

(a) $\{1, -1\}$;

(b) $A =$ zbiór liczb naturalnych nieparzystych;

(c) $[0, 1]$.

0.5. Sprawdź, czy dla dwóch dowolnych zbiorów A, B prawdziwe są zdania:

(a) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$;

(b) $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$;

(c) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \setminus B = A$;

(d) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A^c \cup B^c = \mathcal{U}$.

Literatura

[1] K. Kłaczkow, M. Kurczab, E. Świda, *Matematyka. Podręcznik do liceów i techników. Klasa I. Zakres podstawowy i rozszerzony*, Oficyna Edukacyjna * Krzysztof Pazdro, Warszawa 2002.

[2] J. Płaskonka-Fietkowska, K. Selwat, *Elementy matematyki wyższej*, Wydawnictwo PWSZ im. Witelona w Legnicy, Legnica 2020.

[3] K. Selwat, *Wybrane zagadnienia matematyki*, Wydawnictwo PWSZ im. Witelona w Legnicy, Legnica 2020.

[1] Zadania z tej listy studenci powinni rozwiązać *samodzielnie* przed pierwszymi ćwiczeniami.

Lista 1 – macierze i metoda eliminacji Gaussa

1.1. Wykonaj następujące działania na macierzach:

(a) $4A+7B$, jeśli $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

(b) $3A-2B^T$, jeśli $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$,

(c) $A\cdot B$ oraz $B\cdot A$, jeśli $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$,

(d) $A\cdot B$ oraz $B\cdot A$, jeśli $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$,

(e) $A\cdot B$, jeśli $A=\begin{bmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 9 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$.

1.2. Stosując metodę eliminacji Gaussa rozwiąż układy równań liniowych:

(a) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y-z=-3 \\ 4x-5y-3z=-7 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x+4y-6z=5 \\ x-y+2z=0 \\ -x-2y+3z=3 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+3y-z=1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x+2y+3z=2 \\ 2x+y-z=4 \\ 3x+3y+2z=6 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x+7y-z=2 \\ 2x+4y+2z=8 \\ 3x+11y+z=2 \\ 5x+15y+3z=10 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x+y-z+s=4 \\ 2x-y+z-s=-1 \\ x-y+z+2s=1 \\ -x-y+z-s=2 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ x-y+4z=2 \\ 4x+y+5z=7 \\ 2x+3y-3z=3 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} x+2y-3z+s=0 \\ -x+y+z-2s=0 \\ 2x-y+2z-s=0 \\ x-2y-z+s=0 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} x+y+z+s=1 \\ 2x+y-z-s=1 \end{cases}$

Lista 2 – wyznacznik macierzy, macierz odwrotna

2.1. Oblicz wyznacznik macierzy A, jeśli:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} x & y \\ x & y \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 7 & 8 & 2 \end{bmatrix}$ (e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$ (f) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

2.2. Stosując rozwinięcie Laplace'a oblicz wyznacznik macierzy A, jeśli:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ (d) $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (f) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 7 \\ -5 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

2.3. Wyznacz macierz odwrotną do macierzy A, jeśli:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (f) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(g) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ (h) $A = \begin{bmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{bmatrix}$

(i) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Lista 3 – układy Cramera

3.1. Stosując wzór Cramera rozwiąż układy równań liniowych:

(a) $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + 2y + z = -3 \\ -x + y + z = 4 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y - z = -3 \\ 4x - 5y - 3z = -7 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2z = 0 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -x + 2y = -1 \\ y + z = 1 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + z = 2 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 18 \\ 4x + 5y + z = 9 \\ 7x + 8y + 2z = 0 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} 2x + 2y - z + s = 4 \\ 4x + 3y - z + 2s = 6 \\ 8x + 5y - 3z + 4s = 12 \\ 3x + 3y - 2z + 2s = 6 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} y + z + s = 1 \\ x + z + s = 2 \\ x + y + s = -1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

3.2. Stosując metodę macierzy odwrotnej rozwiąż układy równań liniowych: [2]

(a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 4z = 2 \\ -x + 3y - z = 4 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 5x + 2y + 4z = 1 \\ 7x + 3y + 2z = 2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x + 7y + 3z = 0 \\ 3x + 9y + 4z = 2 \\ x + 5y + 3z = 1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 6z = 4 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \\ -2x + y + 3z = 1 \\ -3x + 2y + z = 3 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 2 \\ x + y + 3z + 4s = 3 \\ 2x - y + 2z + 3s = 4 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} 22x - 6y - 26z + 17s = 0 \\ -17x + 5y + 20z - 13s = 0 \\ -x + 2z - s = 2 \\ 4x - y - 5z + 3s = 4 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} -x - z + s = 4 \\ -x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}s = 2 \\ -x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}s = -1 \\ 2x + z - s = 0 \end{cases}$

[2] *Wskazówka*: Wykorzystaj rezultaty zadania 2.3.

Lista 4 – wstęp do teorii funkcji

4.1. Określ dziedziny naturalne i wyznacz zbiory wartości funkcji:

(a) $f(x) = 1 - 2\sin x$;
(b) $f(x) = \sqrt{2x^2 + 2x - 4}$;
(c) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x^5}}$.

4.2. Zbadaj, czy podane funkcje są ograniczone z dołu lub z góry:

(a) $f(x) = 1 - 2\sin x$;
(b) $f(x) = 2x^2 + 2x - 4$;
(c) $f(x) = \log_2 x$.

4.3. Korzystając z definicji uzasadnij, że podane funkcje są monotoniczne na podanych zbiorach:

(a) $f(x) = 3x + 5, \quad X = \mathbb{R}$;
(b) $f(x) = -\sqrt[3]{x}, \quad X = \mathbb{R}$;
(c) $f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad X = (-\infty, 0)$.

4.4. Korzystając z definicji uzasadnij, że podane funkcje są różnowartościowe na podanych zbiorach:

(a) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
(b) $f(x) = \sqrt{x}, \quad X = [0, \infty)$;
(c) $f(x) = 5x^6, \quad X = [0, \infty)$.

4.5. Dokonaj złożeń $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$:

(a) $f(x) = \sin x, \quad g(x) = \sqrt{x}$;
(b) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = x^4$;
(c) $f(x) = \log_3 x, \quad g(x) = 3^x$.

4.6. Znajdź funkcje odwrotne do podanych:

(a) $f(x) = x^5 + \sqrt{3}$;
(b) $f(x) = 3 - \sqrt[3]{x + 2}$;
(c) $f(x) = 1 - 3^{-x}$.

Lista 5 – ciągi liczbowe i ich granice

5.1. Zbadaj monotoniczność i ograniczoność ciągów:

(a) $a_n = \frac{3}{2n+1}$;

(b) $a_n = 4 + (-1)^n$;

(c) $a_n = \frac{n}{2^n}$;

(d) $a_n = \sin \frac{n\pi}{2}$.

5.2. Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic ciągów oblicz granice:

(a) $\lim \frac{n^2+4n-1}{3n^3+2n^2-4}$;

(b) $\lim \frac{2n^3+3n^2+n+7}{n^2+8n+5}$;

(c) $\lim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$;

(d) $\lim (\sqrt{n^2-4} - \sqrt{n^2-3})$.

5.3. Korzystając z twierdzenia o ciągach z granicą e oblicz granice:

(a) $\lim \left(1 + \dfrac{1}{n+2}\right)^{3n}$;

(b) $\lim \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^{2n+1}$;

(c) $\lim \left(\dfrac{2n+1}{2n+2}\right)^{2n}$.

5.4. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach oblicz granice:

(a) $\lim \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n}$;

(b) $\lim \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n}$;

(c) $\lim \frac{(-1)^n}{n+1}$.

5.5. Korzystając z twierdzenia o dwóch ciągach oblicz granice:

(a) $\lim [(-1)^n - 4^n]$;

(b) $\lim [3 + \sin n]^n$;

(c) $\lim \sqrt[2n]{(n+2)^{2n} + 1}$.

Lista 6 – granica i ciągłość funkcji

6.1. Korzystając z definicji Heinego granicy funkcji uzasadnij, że:

(a) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-2x+7)=7$;

(b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2}{x+3}=\dfrac{1}{2}$;

(c) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3}{x+2}=0$;

(d) $\lim\limits_{x\to -\infty}(-x^2+4x-3)=-\infty$.

6.2. Korzystając z twierdzeń o granicach funkcji oblicz granice:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^5+3x^4-2x^2-7x-1}{4x^5+6x^3-19x+6}$

(b) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^5+3x^4-2x^2-7x-1}{4x^5+6x^3-19x+6}$

(c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^4}{x^2|x|}$

(e) $\lim\limits_{x\to \infty}(\sin x-e^x)$

(f) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1}{x}\cos x$

6.3. Znajdź asymptoty pionowe i ukośne funkcji:

(a) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$;

(b) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$;

(c) $f(x)=\dfrac{1}{e^x-1}$.

6.4. Dobierz współczynniki $a, b\in\mathbb{R}$ tak, aby funkcja f była ciągła, jeśli

(a) $f(x)=\begin{cases} x^2+bx+1 & \text{gdy } x<1\\ a & \text{gdy } x=1\\ x+2 & \text{gdy } x>1\end{cases}$

(b) $f(x)=\begin{cases} a(x^2+3x+1) & \text{gdy } x<1\\ 5 & \text{gdy } x=1\\ b(3^x+2) & \text{gdy } x>1\end{cases}$

(c) $f(x)=\begin{cases} \frac{a\sin x}{x} & \text{gdy } x<0\\ b+1 & \text{gdy } x=0\\ x-a-1 & \text{gdy } x>0\end{cases}$

(d) $f(x)=\begin{cases} a(2^x+3) & \text{gdy } x<2\\ 7 & \text{gdy } x=2\\ b(2x^2-x+1) & \text{gdy } x>2\end{cases}$

Lista 7 – pochodne funkcji

7.1. Korzystając z definicji sprawdź, czy następujące funkcje mają pochodne w podanych punktach:

(a) $f(x) = |x|, \quad x_0 = 0;$

(b) $f(x) = x|x|, \quad x_0 = 0;$

(c) $f(x) = \cos x, \quad x_0 \in \mathbb{R}.$

7.2. Korzystając z odpowiednich reguł różniczkowania oblicz pochodne następujących funkcji:

(a) $f(x) = \left(e^x + \frac{1}{x}\right) x^3;$

(b) $f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 5}{x^3 + 2};$

(c) $f(x) = \frac{\cos x - \ln x}{x^2 + 4};$

(d) $f(x) = \ln \operatorname{tg} x;$

(e) $f(x) = \sqrt{\frac{3 - x}{2x + 1}}.$

7.3. Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$, jeśli:

(a) $f(x) = x^2 + 3x + 7, \quad x_0 = 1;$

(b) $f(x) = 2x^2 - 3x - 7, \quad x_0 = 2;$

(c) $f(x) = e^x, \quad x_0 = 0.$

7.4. Korzystając z reguł de L'Hospitala oblicz granice wyrażeń nieoznaczonych:

(a) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10};$

(b) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{\sin 5x};$

(c) $\lim_{x \to 0} \frac{3^x - 2^x}{x};$

(d) $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x}$, gdzie $a > 0;$

(e) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x};$

(f) $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x};$

(g)* $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$

Lista 8 – rachunek różniczkowy

8.1. Oblicz pochodne trzeciego rzędu funkcji:

(a) $f(x) = x^7 + 3x^4 - 1$;

(b) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$;

(c) $f(x) = (3x-1)e^x$.

8.2. Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji:

(a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x - 72$;

(b) $f(x) = \dfrac{1}{2x - x^2}$;

(c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 4}{x - 3}$;

(d) $f(x) = x \ln x$.

8.3. Wyznacz ekstrema globalne podanych funkcji na wskazanych przedziałach:

(a) $f(x) = x^3 - 3x, \quad [-2, 4]$;

(b) $f(x) = x - 2\sqrt{x}, \quad [0, 5]$;

(c) $f(x) = 2\sin x + \sin 2x, \quad [0, \frac{3\pi}{2}]$;

(d) $f(x) = \dfrac{x^2}{3+x}, \quad [-1, 4]$.

8.4. Określ przedziały wypukłości i punkty przegięcia następujących funkcji:

(a) $f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x + 15$;

(b) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$;

(c) $f(x) = xe^x$;

(d) $f(x) = x - 2\ln x$.

8.5. Zbadaj przebieg zmienności i naszkicuj wykresy paru funkcji, wybranych z zadań **8.2** – **8.4**.

Lista 9 – całki nieoznaczone

9.1. Korzystając z liniowości całki nieoznaczonej oblicz podane całki:

(a) $\int (5x^3 + 2x^2 - 4x + 8)\, dx$;

(b) $\int \left(3\sqrt{x^3} + \frac{1}{x^2} - x\sqrt{x}\right) dx$;

(c) $\int \frac{x^4}{x^2+1}\, dx$.

9.2. Całkując przez części oblicz podane całki:

(a) $\int x \sin x\, dx$;

(b) $\int x^2 e^x\, dx$;

(c) $\int e^x \cos x\, dx$;

(d) $\int \sqrt{x} \ln x\, dx$;

(e) $\int x \operatorname{arc\,tg} x\, dx$.

9.3. Całkując przez podstawienie oblicz podane całki:

(a) $\int (x^2+4)^5 x\, dx$;

(b) $\int \frac{\ln x}{x}\, dx$;

(c) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$;

(d) $\int (2x-1)\sqrt{x^2 - x + 1}\, dx$;

(e) $\int \frac{x^2}{\cos^2(x^3+1)}\, dx$.

Lista 10 – całki oznaczone

10.1. Korzystając z tw. Newtona–Leibniza oblicz podane całki oznaczone:

(a) $\int\limits_1^5 (5x^3 + 2x^2 - 4x + 8)\, dx$;

(b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\, dx$;

(c) $\int\limits_0^2 (x^2 + 4)^5 x\, dx$.

10.2. Korzystając z tw. o całkowaniu przez części dla całki oznaczonej oblicz podane całki oznaczone:

(a) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\, dx$;

(b) $\int\limits_0^1 x^2 e^x\, dx$;

(c) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^x \cos x\, dx$.

10.3. Korzystając z tw. o całkowaniu przez podstawienie dla całki oznaczonej oblicz podane całki oznaczone:

(a) $\int\limits_0^2 (x^2 + 4)^5 x\, dx$;

(b) $\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x}\, dx$;

(c) $\int\limits_1^4 \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$.

10.4. Oblicz pole obszaru D ograniczonego:

(a) wykresami funkcji $y = x^2$ oraz $y = 2x + 3$;

(b) wykresami funkcji $y = \sin x$, $y = \cos x$, osią Oy ($x \geqslant 0$) oraz prostą $x = \frac{3\pi}{2}$.