

Lista 1 – macierze i metoda eliminacji Gaussa

1.1. Wykonaj następujące działania na macierzach:

$$(a) \quad 4A + 7B, \text{ jeśli } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(b) \quad 3A - 2B^T, \text{ jeśli } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix},$$

$$(c) \quad A \cdot B \text{ oraz } B \cdot A, \text{ jeśli } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \\ 9 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(d) \quad A \cdot B \text{ oraz } B \cdot A, \text{ jeśli } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix},$$

$$(e) \quad A \cdot B, \text{ jeśli } A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 9 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

1.2. Stosując metodę eliminacji Gaussa rozwiąż układy równań liniowych:

$$(a) \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y - z = -3 \\ 4x - 5y - 3z = -7 \end{cases} \quad (b) \quad \begin{cases} 2x + 4y - 6z = 5 \\ x - y + 2z = 0 \\ -x - 2y + 3z = 3 \end{cases}$$

$$(c) \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases} \quad (d) \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + y - z = 4 \\ 3x + 3y + 2z = 6 \end{cases}$$

$$(e) \quad \begin{cases} x + 7y - z = 2 \\ 2x + 4y + 2z = 8 \\ 3x + 11y + z = 2 \\ 5x + 15y + 3z = 10 \end{cases} \quad (f) \quad \begin{cases} x + y - z + s = 4 \\ 2x - y + z - s = -1 \\ x - y + z + 2s = 1 \\ -x - y + z - s = 2 \end{cases}$$

$$(g) \quad \begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ x - y + 4z = 2 \\ 4x + y + 5z = 7 \\ 2x + 3y - 3z = 3 \end{cases} \quad (h) \quad \begin{cases} x + 2y - 3z + s = 0 \\ -x + y + z - 2s = 0 \\ 2x - y + 2z - s = 0 \\ x - 2y - z + s = 0 \end{cases}$$

$$(i) \quad \begin{cases} x + y + z + s = 1 \\ 2x + y - z - s = 1 \end{cases}$$

Lista 2 – wyznacznik macierzy, macierz odwrotna

2.1. Oblicz wyznacznik macierzy A , jeśli:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} & \text{(b)} A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} & \text{(c)} A = \begin{bmatrix} x & y \\ x & y \end{bmatrix} \\ \text{(d)} A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 7 & 8 & 2 \end{bmatrix} & \text{(e)} A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix} & \text{(f)} A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

2.2. Stosując rozwinięcie Laplace'a oblicz wyznacznik macierzy A , jeśli:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \text{(b)} A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \\ \text{(c)} A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 0 & 4 \end{bmatrix} & \text{(d)} A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\ \text{(e)} A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} & \text{(f)} A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 7 \\ -5 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

2.3. Wyznacz macierz odwrotną do macierzy A , jeśli:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} & \text{(b)} A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix} \\ \text{(c)} A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} & \text{(d)} A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \text{(e)} A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} & \text{(f)} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \text{(g)} A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} & \text{(h)} A = \begin{bmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{bmatrix} \\ \text{(i)} A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} & \end{array}$$

Lista 3 – układy Cramera

3.1. Stosując wzór Cramera rozwiąż układy równań liniowych:

$$(a) \begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + 2y + z = -3 \\ -x + y + z = 4 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y - z = -3 \\ 4x - 5y - 3z = -7 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2z = 0 \\ x - y - z = 2 \end{cases} \quad (d) \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -x + 2y = -1 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + z = 2 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \quad (f) \begin{cases} x + 2y + 3z = 18 \\ 4x + 5y + z = 9 \\ 7x + 8y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$(g) \begin{cases} 2x + 2y - z + s = 4 \\ 4x + 3y - z + 2s = 6 \\ 8x + 5y - 3z + 4s = 12 \\ 3x + 3y - 2z + 2s = 6 \end{cases} \quad (h) \begin{cases} y + z + s = 1 \\ x + z + s = 2 \\ x + y + s = -1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

3.2. Stosując metodę macierzy odwrotnej rozwiąż układy równań liniowych: ¹

$$(a) \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 4z = 2 \\ -x + 3y - z = 4 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 5x + 2y + 4z = 1 \\ 7x + 3y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} 2x + 7y + 3z = 0 \\ 3x + 9y + 4z = 2 \\ x + 5y + 3z = 1 \end{cases} \quad (d) \begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 6z = 4 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \\ -2x + y + 3z = 1 \\ -3x + 2y + z = 3 \end{cases} \quad (f) \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 2 \\ x + y + 3z + 4s = 3 \\ 2x - y + 2z + 3s = 4 \end{cases}$$

$$(g) \begin{cases} 22x - 6y - 26z + 17s = 0 \\ -17x + 5y + 20z - 13s = 0 \\ -x + 2z - s = 2 \\ 4x - y - 5z + 3s = 4 \end{cases} \quad (h) \begin{cases} -x - z + s = 4 \\ -x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}s = 2 \\ -x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}s = -1 \\ 2x + z - s = 0 \end{cases}$$

¹ Wskazówka: Wykorzystaj rezultaty zadania 2.3.

Lista 4 – wstęp do teorii funkcji

4.1. Określ dziedziny naturalne i wyznacz zbiory wartości funkcji:

(a) $f(x) = 1 - 2 \sin x$;

(b) $f(x) = \sqrt{2x^2 + 2x - 4}$;

(c) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x^5}}$.

4.2. Zbadaj, czy podane funkcje są ograniczone z dołu lub z góry:

(a) $f(x) = 1 - 2 \sin x$;

(b) $f(x) = 2x^2 + 2x - 4$;

(c) $f(x) = \log_2 x$.

4.3. Dokonaj złożień $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$:

(a) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sqrt{x}$;

(b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x^4$;

(c) $f(x) = \log_3 x$, $g(x) = 3^x$.

4.4. Znajdź funkcje odwrotne do podanych:

(a) $f(x) = x^5 + \sqrt{3}$;

(b) $f(x) = 3 - \sqrt[3]{x+2}$;

(c) $f(x) = 1 - 3^{-x}$.

Lista 5 – ciągi liczbowe i ich granice

5.1. Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic ciągów oblicz granice:

- (a) $\lim \frac{n^2+4n-1}{3n^3+2n^2-4};$
- (b) $\lim \frac{2n^3+3n^2+n+7}{n^2+8n+5};$
- (c) $\lim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}};$
- (d) $\lim (\sqrt{n^2-4} - \sqrt{n^2-3}).$

5.2. Korzystając z twierdzenia o ciągach z granicą e oblicz granice:

- (a) $\lim \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{3n};$
- (b) $\lim \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{2n+1};$
- (c) $\lim \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{2n}.$

5.3. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach oblicz granice:

- (a) $\lim \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n};$
- (b) $\lim \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n};$
- (c) $\lim \frac{(-1)^n}{n+1}.$

5.4. Korzystając z twierdzenia o dwóch ciągach oblicz granice:

- (a) $\lim [(-1)^n - 4^n];$
- (b) $\lim [3 + \sin n]^n;$
- (c) $\lim \sqrt[2n]{(n+2)^{2n} + 1}.$

Lista 6 – granica i ciągłość funkcji

6.1. Korzystając z definicji Heinego granicy funkcji uzasadnij, że:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 2x + 7) = 7;$
- (b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2}{x+3} = \frac{1}{2};$
- (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x+2} = 0;$
- (d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + 4x - 3) = -\infty.$

6.2. Korzystając z twierdzeń o granicach funkcji oblicz granice:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^5 + 3x^4 - 2x^2 - 7x - 1}{4x^5 + 6x^3 - 19x + 6}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 + 3x^4 - 2x^2 - 7x - 1}{4x^5 + 6x^3 - 19x + 6}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^4}{x^2|x|}$
- (e) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin x - e^x)$
- (f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cos x$

6.3. Dobierz współczynniki $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby funkcja f była ciągła, jeśli

- (a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + 1 & \text{gdy } x < 1 \\ a & \text{gdy } x = 1 \\ x + 2 & \text{gdy } x > 1 \end{cases}$
- (b) $f(x) = \begin{cases} a(x^2 + 3x + 1) & \text{gdy } x < 1 \\ 5 & \text{gdy } x = 1 \\ b(3^x + 2) & \text{gdy } x > 1 \end{cases}$
- (c) $f(x) = \begin{cases} \frac{a \sin x}{x} & \text{gdy } x < 0 \\ b + 1 & \text{gdy } x = 0 \\ x - a - 1 & \text{gdy } x > 0 \end{cases}$
- (d) $f(x) = \begin{cases} a(2^x + 3) & \text{gdy } x < 2 \\ 7 & \text{gdy } x = 2 \\ b(2x^2 - x + 1) & \text{gdy } x > 2 \end{cases}$

Lista 7 – pochodne funkcji

7.1. Korzystając z odpowiednich reguł różniczkowania oblicz pochodne następujących funkcji:

(a) $f(x) = \left(e^x + \frac{1}{x}\right)x^3;$

(b) $f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 5}{x^3 + 2};$

(c) $f(x) = \frac{\cos x - \ln x}{x^2 + 4};$

(d) $f(x) = \ln \operatorname{tg} x;$

(e) $f(x) = \sqrt{\frac{3-x}{2x+1}}.$

7.2. Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$, jeśli:

(a) $f(x) = x^2 + 3x + 7, \quad x_0 = 1;$

(b) $f(x) = 2x^2 - 3x - 7, \quad x_0 = 2;$

(c) $f(x) = e^x, \quad x_0 = 0.$

7.3. Korzystając z reguł de L'Hospitala oblicz granice wyrażeń nieoznaczonych:

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10};$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin 5x};$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^x}{x};$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}, \text{ gdzie } a > 0;$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x};$

(f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x};$

Lista 8 – rachunek różniczkowy

8.1. Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji:

(a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x - 72$;

(b) $f(x) = \frac{1}{2x - x^2}$;

(c) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{x - 3}$;

(d) $f(x) = x \ln x$.

8.2. Wyznacz ekstrema globalne podanych funkcji na wskazanych przedziałach:

(a) $f(x) = x^3 - 3x$, $[-2, 4]$;

(b) $f(x) = x - 2\sqrt{x}$, $[0, 5]$;

(c) $f(x) = 2 \sin x + \sin 2x$, $[0, \frac{3\pi}{2}]$;

(d) $f(x) = \frac{x^2}{3 + x}$, $[-1, 4]$.

8.3. Określ przedziały wypukłości i punkty przegięcia następujących funkcji:

(a) $f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x + 15$;

(b) $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$;

(c) $f(x) = xe^x$;

(d) $f(x) = x - 2 \ln x$.

Lista 9 – całki nieoznaczone

9.1. Korzystając z liniowości całki nieoznaczonej oblicz podane całki:

(a) $\int (5x^3 + 2x^2 - 4x + 8) dx;$

(b) $\int \left(3\sqrt{x^3} + \frac{1}{x^2} - x\sqrt{x} \right) dx;$

(c) $\int \frac{x^4}{x^2 + 1} dx.$

9.2. Całkując przez części oblicz podane całki:

(a) $\int x \sin x dx;$

(b) $\int x^2 e^x dx;$

(c) $\int e^x \cos x dx;$

(d) $\int \sqrt{x} \ln x dx;$

(e) $\int x \arctg x dx.$

9.3. Całkując przez podstawienie oblicz podane całki:

(a) $\int (x^2 + 4)^5 x dx;$

(b) $\int \frac{\ln x}{x} dx;$

(c) $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx;$

(d) $\int (2x - 1) \sqrt{x^2 - x + 1} dx;$

(e) $\int \frac{x^2}{\cos^2(x^3 + 1)} dx.$

Lista 10 – całki oznaczone

10.1. Korzystając z tw. Newtona–Leibniza oblicz podane całki oznaczone:

(a) $\int_1^5 (5x^3 + 2x^2 - 4x + 8) dx;$

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx;$

(c) $\int_0^2 (x^2 + 4)^5 x dx.$

10.2. Korzystając z tw. o całkowaniu przez części dla całki oznaczonej oblicz podane całki oznaczone:

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx;$

(b) $\int_0^1 x^2 e^x dx;$

(c) $\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos x dx.$

10.3. Korzystając z tw. o całkowaniu przez podstawienie dla całki oznaczonej oblicz podane całki oznaczone:

(a) $\int_0^2 (x^2 + 4)^5 x dx;$

(b) $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx;$

(c) $\int_1^4 \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$

Literatura

- [1] J. Płaskonka-Fietkowska, K. Selwat, *Elementy matematyki wyższej*, Wydawnictwo Collegium Witelona Uczelnia Państwowa w Legnicy, Legnica 2025.
- [2] K. Selwat, *Wybrane zagadnienia matematyki*, Wydawnictwo PWSZ im. Witelona w Legnicy, Legnica 2020.