

## Lista 0 – zastosowania rachunku różniczkowego

**0.1.** Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji  $f$  w punkcie  $(x_0, f(x_0))$ , jeśli:

(a)  $f(x) = x^2 + 3x + 7$ ,  $x_0 = 1$ ;

(b)  $f(x) = 2x^2 - 3x - 7$ ,  $x_0 = 2$ ;

(c)  $f(x) = e^x$ ,  $x_0 = 0$ .

**0.2.** Korzystając z reguł de L'Hospitala oblicz granice wyrażeń nieoznaczonych:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10}$ ;

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin 5x}$ ;

(c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^x}{x}$ ;

(d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$ , gdzie  $a > 0$ ;

(e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ ;

(f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$ .

**0.3.** Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji:

(a)  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x - 72$ ;

(b)  $f(x) = \frac{1}{2x - x^2}$ ;

(c)  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{x - 3}$ ;

(d)  $f(x) = x \ln x$ .

**0.4.** Wyznacz ekstrema globalne podanych funkcji na wskazanych przedziałach:

(a)  $f(x) = x^3 - 3x$ ,  $[-2, 4]$ ;

(b)  $f(x) = x - 2\sqrt{x}$ ,  $[0, 5]$ ;

(c)  $f(x) = 2 \sin x + \sin 2x$ ,  $[0, \frac{3\pi}{2}]$ ;

(d)  $f(x) = \frac{x^2}{3+x}$ ,  $[-1, 4]$ .

**0.5.** Określ przedziały wypukłości i punkty przegięcia następujących funkcji:

(a)  $f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x + 15$ ;

(b)  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ;

(c)  $f(x) = xe^x$ ;

(d)  $f(x) = x - 2 \ln x$ .

## Lista 1 – rozwinięcia funkcji, szeregi potęgowe

1.1. Napisz wzór Taylora z resztą Lagrange'a dla następujących danych:

(a)  $f(x) = \ln x, \quad x_0 = 1, \quad n = 3;$

(b)  $f(x) = \sin x, \quad x_0 = 0, \quad n = 4;$

(c)  $f(x) = e^x, \quad x_0 = 0, \quad n = 7.$

1.2. Stosując wzór Maclaurina oblicz wartość liczby  $e$  z dokładnością  $10^{-5}$ .

1.3. Wyznacz promień zbieżności i przedziały zbieżności szeregów potęgowych:

(a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2n+1}$

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{(n+1)^2 2^n}$

(c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} (x+2)^n$

(d)  $\sum_{n=0}^{\infty} (6-3x)^n$

(e)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}-1}$

1.4. Znajdź szeregi Maclaurina podanych funkcji i ustal przedziały ich zbieżności:

(a)  $f(x) = \frac{4x}{x+2}$

(b)  $f(x) = x \sin 3x$

(c)  $f(x) = \frac{3}{1+x-2x^2}$

(d)  $f(x) = \cos^2 x$

(e)  $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{x}$

## Lista 2 – całki nieoznaczone

**2.1.** Korzystając z liniowości całki nieoznaczonej oblicz podane całki:

(a)  $\int (5x^3 + 2x^2 - 4x + 8) dx$ ;

(b)  $\int \left( 3\sqrt{x^3} + \frac{1}{x^2} - x\sqrt{x} \right) dx$ ;

(c)  $\int \frac{x^4}{x^2 + 1} dx$ .

**2.2.** Całkując przez części oblicz podane całki:

(a)  $\int x \sin x dx$ ;

(b)  $\int x^2 e^x dx$ ;

(c)  $\int e^x \cos x dx$ ;

(d)  $\int \sqrt{x} \ln x dx$ ;

(e)  $\int x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x dx$ .

**2.3.** Całkując przez podstawienie oblicz podane całki:

(a)  $\int (x^2 + 4)^5 x dx$ ;

(b)  $\int \frac{\ln x}{x} dx$ ;

(c)  $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ ;

(d)  $\int (2x - 1) \sqrt{x^2 - x + 1} dx$ ;

(e)  $\int \frac{x^2}{\cos^2(x^3 + 1)} dx$ .

**2.4.** Oblicz podane całki z funkcji wymiernych:

(a)  $\int \frac{x + 2}{x(x - 2)} dx$ ;

(b)  $\int \frac{1}{x^2 - 7x + 10} dx$ ;

(c)  $\int \frac{1}{x^2 - x + 1} dx$ ;

(d)  $\int \frac{3x - 1}{x^2 + 6x + 10} dx$ .

## Lista 3 – całki oznaczone

**3.1.** Korzystając z tw. Newtona–Leibniza oblicz podane całki oznaczone:

$$(a) \int_1^5 (5x^3 + 2x^2 - 4x + 8) dx;$$

$$(b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx;$$

$$(c) \int_0^2 (x^2 + 4)^5 x dx.$$

**3.2.** Całkując przez części oblicz podane całki oznaczone:

$$(a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx;$$

$$(b) \int_0^1 x^2 e^x dx;$$

$$(c) \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos x dx.$$

**3.3.** Całkując przez podstawienie oblicz podane całki oznaczone:

$$(a) \int_0^2 (x^2 + 4)^5 x dx;$$

$$(b) \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx;$$

$$(c) \int_1^4 \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$$

**3.4.** Wyznacz wartości średnie z podanych funkcji na danych przedziałach:

$$(a) f(x) = e^x, \quad [-2, 2];$$

$$(b) f(x) = \frac{x}{x-1}, \quad [-1, 0];$$

$$(c) f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}, \quad [0, \frac{\pi}{2}].$$

**3.5.** Oblicz pole obszaru  $D$  ograniczonego:

$$(a) \text{wykresami funkcji } y = x^2 \text{ oraz } y = 2x + 3;$$

$$(b) \text{wykresami funkcji } y = \sin x, y = \cos x, \text{ osi\u0105 } Oy \text{ (} x \geq 0 \text{)} \text{ oraz prost\u0105 } x = \frac{3\pi}{2}.$$

## Lista 4 – całki niewłaściwe

4.1. Korzystając z definicji zbadaj zbieżność podanych całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

$$(a) \int_1^{\infty} \frac{1}{(x+2)^2} dx;$$

$$(b) \int_{\pi}^{\infty} x \sin x dx;$$

$$(c) \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{3x+5}} dx;$$

$$(d) \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^3} dx.$$

4.2. Korzystając z kryterium porównawczego zbadaj zbieżność podanych całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

$$(a) \int_{10}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}-3} dx;$$

$$(b) \int_2^{\infty} \frac{x-1}{x^4+x+1} dx;$$

$$(c) \int_{\pi}^{\infty} \frac{1+\sin x}{x^3} dx;$$

$$(d) \int_{-\infty}^0 \frac{2^x}{x-1} dx.$$

4.3. Korzystając z kryterium ilorazowego zbadaj zbieżność podanych całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

$$(a) \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+x^2} dx;$$

$$(b) \int_5^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^5-3}} dx;$$

$$(c) \int_1^{\infty} \sin^2 \frac{1}{x} dx;$$

$$(d) \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{2x}+1}{e^x-1} dx.$$

## Lista 5 – równania różniczkowe zwyczajne

5.1. Rozwiąż równania różniczkowe:

(a)  $x dx + y dy = 0$ ,

(b)  $x(1 + y^2) dx - y(1 + x^2) dy = 0$ .

5.2. Rozwiąż równania różniczkowe:

(a)  $y' = \frac{y}{x}$ ,

(b)  $y' = -2xy$ ,

(c)  $y' = e^{x-y}$ ,

(d)  $y' = \frac{\sqrt{y}}{x}$ .

5.3. Rozwiąż równania różniczkowe, a następnie wyznacz rozwiązanie szczególne przechodzące przez dany punkt  $p = (x_0, y_0)$ :

(a)  $(1 - x) dy + y dx = 0$ ,  $p = (0, 1)$ ,

(b)  $y' = y \cos x$ ,  $p = \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ .

5.4. Rozwiąż równania różniczkowe liniowe o stałych współczynnikach metodą przewidywań:

(a)  $y' + y = x^2$ ,

(b)  $y' - 2y = \sin x$ ,

(c)  $y' + 3y = xe^{2x}$ ,

(d)  $y' - y = x \cos x$ .

5.5. Rozwiąż równania różniczkowe liniowe z zadania 5.4 metodą uzmienniania stałej.

5.6. Rozwiąż równania różniczkowe liniowe:

(a)  $y' - \frac{y}{x} = -x$ ,

(b)  $y' - x^2 y = x^2$ .