Lista 1 – dokładność, kodowanie liczb

1.1. Niech $x_1 = 1.5 \pm 0.04$, $x_2 = 2.5 \pm 0.02$. Wyznacz błędy powstałe przy dodawaniu, odejmowaniu, mnożeniu i dzieleniu tych liczb.

1.2. Niech $fl(p, m, w)$ oznacza system liczb zmiennopozycyjnych, w którym p - podstawa systemu, m - liczba cyfr mantysy, w - liczba cyfr cechy (wykładnika). W systemie $fl(10, 3, 2)$ wyznacz zapis następujących liczb:

(a) 1230;

(b) 5423;

(c) 6428.

1.3. Wyznacz wartość sumy:

(a) $124 + 0.1 + 0.4 + 0.3 + 1000$,

(b) $0.1 + 0.4 + 0.3 + 124 + 1000$

w systemie $fl(10, 3, 2)$.

1.4. Zadanie polega na wyznaczeniu wartości funkcji jednej zmiennej $y = f(x)$ dla znanej wartości x. Jeżeli x jest obarczony błędem ε_x, to wynik jest obarczony błędem

$$\varepsilon_y = \left|\frac{x}{y} f'(x)\right| \varepsilon_x$$

Wyrażenie $w_y = \left|\frac{x}{y} f'(x)\right|$ nazywa się *wskaźnikiem uwarunkowania zadania*. Jeśli wskaźnik ten jest skończony, to zadanie nazywamy *dobrze uwarunkowanym*. Sprawdź uwarunkowania zadań:

(a) $y = x^2$;

(b) $y = \sqrt{x}$.

Lista 2 – rozwiązywanie układów równań liniowych

2.1. Wyznacz rozkład LU macierzy A, jeśli:

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 30 & 24 & 18 \\ 15 & 32 & 21 \\ 20 & 31 & 23 \end{bmatrix}$

2.2. Stosując metodę eliminacji Gaussa rozwiąż układy równań liniowych:

(a) $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + 2y + z = -3 \\ -x + y + z = 4 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y - z = -3 \\ 4x - 5y - 3z = -7 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2z = 0 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -x + 2y = -1 \\ y + z = 1 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + z = 2 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 18 \\ 4x + 5y + z = 9 \\ 7x + 8y + 2z = 0 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 4z = 2 \\ -x + 3y - z = 4 \end{cases}$ (h) $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 5x + 2y + 4z = 1 \\ 7x + 3y + 2z = 2 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} 2x + 7y + 3z = 0 \\ 3x + 9y + 4z = 2 \\ x + 5y + 3z = 1 \end{cases}$ (j) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 6z = 4 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

(k) $\begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \\ -2x + y + 3z = 1 \\ -3x + 2y + z = 3 \end{cases}$ (l) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 2 \\ x + y + 3z + 4s = 3 \\ 2x - y + 2z + 3s = 4 \end{cases}$

(ł) $\begin{cases} 2x + 2y - z + s = 4 \\ 4x + 3y - z + 2s = 6 \\ 8x + 5y - 3z + 4s = 12 \\ 3x + 3y - 2z + 2s = 6 \end{cases}$ (m) $\begin{cases} y + z + s = 1 \\ x + z + s = 2 \\ x + y + s = -1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

2.3. Wyznacz rozkład Choleskiego macierzy A, jeśli:

(a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 10 \\ 3 & 10 & 22 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 8 \end{bmatrix}$

Lista 3 – równania nieliniowe

3.1. Wyznacz pięć iteracji metody bisekcji (połowienia przedziału) wyznaczania pierwiastka równania $x^5 - x^4 - 2 = 0$ w przedziale $\left[\frac{75}{100}, \frac{175}{100}\right]$.

3.2. Wyznacz pięć iteracji metody Newtona wyznaczania pierwiastka równania $x^5 - x^4 - 2 = 0$ z $x_0 = 1.75$.

3.3. Wyznacz pięć iteracji metody siecznych wyznaczania pierwiastka równania $x^5 - x^4 - 2 = 0$ w przedziale $\left[\frac{150}{100}, \frac{175}{100}\right]$.

Lista 4 – interpolacja

4.1. Niech dany będzie zbiór $n = 5$ punktów na płaszczyźnie (patrz tabela). Wyznacz wielomian interpolacyjny Lagrange'a oparty na danych węzłach.

i	x_i	y_i
1	x_1	y_1
2	x_2	y_2
3	x_3	y_3
4	x_4	y_4
5	x_5	y_5

4.2. Wyznacz wielomian interpolacyjny Lagrange'a, zbudowany na pięciu węzłach, podanych w poniższej tabeli. Wyznacz wartość wyznaczonego wielomianu w punkcie $x = 1.125$.

i	x_i	y_i
1	0.5	0.479426
2	1.0	0.841471
3	1.25	0.948985
4	1.75	0.983986
5	2.0	0.909297

4.3. Zbuduj ilorazy różnicowe zdefiniowane na $n = 5$ punktach (x_i, y_i) dla $i = 1, 2, \ldots, 5$.

4.4. Wyznacz wielomian interpolacyjny Newtona, zbudowany na pięciu węzłach, podanych w poniższej tabeli. Wyznacz wartość wyznaczonego wielomianu w punkcie $x = 2.5$.

i	x_i	y_i
1	1.5	0.997495
2	2.0	0.909297
3	2.25	0.778073
4	2.75	0.381661
5	3.0	0.14112

Lista 5 – aproksymacja

5.1. Metodą najmniejszych kwadratów wyznacz prostą aproksymującą funkcję daną w postaci dyskretnej w poniższej tabeli:

i	x_i	y_i
1	1.05	-0.15
2	1.95	1.0
3	2.1	2.0
4	3.5	3.2
5	4.05	4.4

5.2. Wyznacz prostą regresji dla danych punktów:

x	0	0.35	0.7	1.05	1.4
y	0	0.342898	0.644218	0.867423	0.98545

5.3. Wyznacz krzywą aproksymującą postaci $y = a + bx + cx^2$ dla danych punktów:

a)

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0
y	0	0.479426	0.841471	0.997495	0.909297

b)

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5
y	1	0.87758	0.540302	0.079737	-0.41614	-0.80114	-0.98999	-0.93645	-0.65364	-0.21079

5.4. Wyznacz krzywą stopnia trzeciego, aproksymującą funkcję daną w postaci dyskretnej, przedstawioną w poniższej tabeli:

i	x_i	y_i
1	0.3	0.43
2	0.4	0.36
3	0.5	0.35
4	0.6	0.38
5	0.7	0.37
6	0.8	0.373
7	0.9	0.39
8	1.0	0.51
9	1.1	0.6
10	1.2	0.65