

Zadania – ciągi i ich granice

1. Zbadaj monotoniczność ciągów:

a) $a_n = 5 - \frac{3}{n}$,

b) $a_n = \frac{n+2}{n+4}$,

c) $a_n = 3 - \frac{1}{2-3n}$,

d) $a_n = \frac{4n+2}{n+5}$.

2. Oblicz granicę ciągu:

a) $a_n = \frac{n^2-3n+6}{2n^2+4n-7}$,

b) $a_n = \frac{7n(2n+1)}{3n^2+5n-1}$,

c) $a_n = \frac{(\sqrt{2n}-2)(\sqrt{2n}+2)}{(3\sqrt{n}+4)^2}$,

d) $a_n = \sqrt{\frac{5n^3-6n}{2n^3+6n-2}}$.

3. Oblicz granicę ciągu:

a) $a_n = \frac{8^n-3}{3-8^{n-1}}$,

b) $a_n = \frac{4^n+1}{6 \cdot 4^n+5}$,

c) $a_n = \frac{(2 \cdot 3^n-1)^2}{(3^n+2^n)^2}$,

d) $a_n = \frac{81^n+9}{(3^{2n}-3)(3^{2n}+3)}$.

4. Oblicz granicę ciągu:

a) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$,

b) $a_n = \sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n}$,

c) $a_n = \sqrt{4n^2-2} - \sqrt{4n^2+3}$,

d) $a_n = \sqrt{3n^2+5n-1} - \sqrt{3n^2+n+3}$.

5. Oblicz granicę ciągu:

a) $a_n = \sqrt[n]{2^n+3^n}$,

b) $a_n = \sqrt[n]{\left(\frac{5}{6}\right)^n + 1} + \left(\frac{6}{5}\right)^n$,

c) $a_n = \frac{\cos n}{2n^2-1}$,

d) $a_n = \frac{3n^2 \cdot \sin(n^2)}{5n^2+4n-1}$.

6. Oblicz granicę ciągu:

a) $a_n = 3n^2 - 5n + 7,$

b) $a_n = 6n^4 - 5n^3 + 2n^2 + 4n - 9,$

c) $a_n = \frac{-3n^5 - 8n^3 + 19}{-8n^2 + 7n - 10},$

d) $a_n = \frac{6n^5 - 2n^4 + 9n^2 - 6}{(3n^2 - 3)^2},$

e) $a_n = \sqrt{3n} - \sqrt{2n + 4},$

f) $a_n = \sqrt{n^2 + 2n - 1} - \sqrt{3n + 5}.$

7. Oblicz granicę ciągu:

a) $b_n = \left(1 + \frac{4}{n}\right)^n,$

b) $b_n = \left(\frac{n+7}{n}\right)^{n+5},$

c) $b_n = \left(1 - \frac{3}{n}\right)^{-n},$

d) $b_n = \left(\frac{n^2+2}{n^2}\right)^{3n^2}.$

Zadania – elementy analizy matematycznej

1. Oblicz granice następujących funkcji w podanych punktach:

a) $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+2x-8}, x_0 = 2,$

b) $f(x) = \frac{x+1}{x-3}, x_0 = -2,$

c) $f(x) = \frac{x^4+x^2-2}{x^4-3x^2+2}, x_0 = -1,$

d) $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}-1}{x^3-2x^2+x-2}, x_0 = 2,$

e) $f(x) = \frac{\sin 7x}{5x}, x_0 = 0,$

f) $f(x) = \frac{\sin 2x}{\sin 3x}, x_0 = 0.$

2. Oblicz granice następujących funkcji w podanych punktach:

a) $f(x) = \frac{x^2-1}{(2+x)^2}, x_0 = -2,$

b) $f(x) = \frac{x^2-12}{|x-3|}, x_0 = 3,$

c) $f(x) = \frac{\sqrt{4-x}-2}{x^3}, x_0 = 0,$

d) $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^3-3x+2}, x_0 = 1.$

3. Oblicz granice jednostronne następujących funkcji w podanych punktach:

a) $f(x) = \frac{x^2+3x}{1-x}, x_0 = 1,$

b) $f(x) = \frac{-4x^2+x}{-x^2+x+2}, x_0 = -1,$

c) $f(x) = \frac{\sin^3 x}{|x|^3}, x_0 = 0,$

d) $f(x) = \frac{2x^2-x-1}{|x^2-4x+3|}, x_0 = 1.$

4. Oblicz granice następujących funkcji w minus i plus nieskończoności:

a) $f(x) = -x^4 - x^3 + 5x^2 + 6x - 4,$

b) $f(x) = \frac{2x-4}{3x+2},$

$$\begin{aligned} \text{c) } f(x) &= \frac{-4x^2+6}{-3x^2+5x-4}, \\ \text{d) } f(x) &= \frac{-2x^2+5x-7}{2x-9}, \\ \text{e) } f(x) &= \frac{\sqrt{x^2+3x-4}}{-4x+2}, \\ \text{f) } f(x) &= \frac{\sqrt{x^2-3x}-\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2+5}}. \end{aligned}$$

5. Korzystając z twierdzenia o trzech funkcjach, oblicz granice:

- funkcji $f(x) = \frac{\cos x}{x}$ w minus i plus nieskończoności,
- funkcji $f(x) = \frac{\sin x}{x^3+2}$ w minus i plus nieskończoności,
- funkcji $f(x) = \frac{\cos(x^{2010}+2010)}{x^{2010}+2010}$ w plus i minus nieskończoności.

6. Zbadaj ciągłość funkcji f w podanych obok punktach, jeśli:

- $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{dla } x \in (-\infty, -1) \\ -x+2 & \text{dla } x \in \langle -1, +\infty \rangle \end{cases}, \quad x_0 = -1,$
- $f(x) = \begin{cases} -x^2+x & \text{dla } x \in (-\infty, -1) \\ x^2-1 & \text{dla } x \in \langle -1, 2 \rangle \\ \frac{1}{2}x+2 & \text{dla } x \in \langle 2, +\infty \rangle \end{cases}, \quad x_0 = -1, x_1 = 2.$
- $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 3x}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 2 & \text{dla } x = 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0.$

7. Wyznacz wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby funkcja f była ciągła w zbiorze \mathbb{R} , jeśli:

- $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{dla } x < -1 \\ a & \text{dla } x \in \langle -1, 1 \rangle \\ -x^2+4b & \text{dla } x \geq 1 \end{cases},$
- $f(x) = \begin{cases} x^2+ax & \text{dla } x < 2 \\ x-4 & \text{dla } x \in \langle 2, 3 \rangle \\ -5x+b & \text{dla } x \geq 3 \end{cases},$
- $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x}-a & \text{dla } x < 1 \\ 2x^2+3b & \text{dla } x \in \langle -1, 1 \rangle \\ -4x+2 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}.$

8. Korzystając z definicji, zbadaj różniczkowalność funkcji f w punkcie x_0 , jeśli:

a) $f(x) = 4x^2 + 2x$, $x_0 = -2$,

b) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$, $x_0 = 3$,

c) $f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{dla } x \leq 3 \\ -x + 3 & \text{dla } x > 3 \end{cases}$, $x_0 = 3$,

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{3x+6} & \text{dla } x \neq -2 \\ -\frac{4}{3} & \text{dla } x = -2 \end{cases}$, $x_0 = -2$.

9. Wyznacz funkcje pochodne następujących funkcji:

a) $f(x) = 5x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 2x + 8$,

b) $f(x) = 6\sqrt[3]{x^4} - 5x^{-2}$,

c) $f(x) = (4x - 3)(5x + 6)$,

d) $f(x) = (4 - \sqrt{x})(8x^2 - 5\sqrt[3]{x})$,

e) $f(x) = (x - 3)(5x^2 + 4)(x^5 - 1)$,

f) $f(x) = \frac{3x+2}{x-9}$,

g) $f(x) = \frac{x^3+2x}{x^2-6}$,

h) $f(x) = \frac{3x^2-5x+7}{x^3+4}$.

10. Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej, wyznacz funkcje pochodne następujących funkcji:

a) $f(x) = (3 + 5x)^8$,

b) $f(x) = (x - 5)^2(3x^2 + 2)$,

c) $f(x) = 3\sqrt{x^2 + 6x + 2}$,

d) $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+4}}$,

e) $f(x) = \frac{1}{\sin 3x}$,

f) $f(x) = 4e^{\cos x}$,

g) $f(x) = (x^2 - 3)e^{4x}$,

h) $f(x) = \ln 4x - \frac{2}{x}$.

11. Wyznacz równanie prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P , jeśli:
- $f(x) = 5\sqrt{x}$, $P(4, y_0)$,
 - $f(x) = -2x^5$, $P(x_0, 64)$,
 - $f(x) = \frac{2-x}{x-1}$, $P(x_0, -4)$,
 - $f(x) = \sqrt{1-4x}$, $P(-2, y_0)$.
12. Wyznacz współrzędne takiego punktu A , że prosta styczna do wykresu funkcji $f(x) = -\sqrt{3x+1}$ w punkcie A jest równoległa do prostej $k: 3x + 8y + 2 = 0$.
13. Wyznacz otwarte przedziały monotoniczności następujących funkcji:
- $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x - 2$,
 - $f(x) = \frac{3}{2}x^4 - \frac{13}{3}x^3 + 4x - 3$,
 - $f(x) = \frac{-x^2+x-4}{x-1}$,
 - $f(x) = \frac{-2x^2+3}{4-x^2}$,
 - $f(x) = x\sqrt{5-x}$,
 - $f(x) = \cos x - \sin x$ dla $x \in (0, 2\pi)$,
 - $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$,
 - $f(x) = \frac{x}{\ln x}$.
14. Wyznacz ekstrema lokalne następujących funkcji (o ile istnieją):
- $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6x + 10$,
 - $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 - x^3 + x - 2$,
 - $f(x) = \frac{x^2+x+9}{x+1}$,
 - $f(x) = \frac{4-x^2}{2x^2-3}$,
 - $f(x) = x\sqrt{2-x}$,
 - $f(x) = x - \sqrt{2} \cos x$ dla $x \in (0, 2\pi)$,
 - $f(x) = x^2 \ln x$,
 - $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

15. Wyznacz ekstrema globalne funkcji f w przedziale domkniętym A , jeśli:

a) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{3}$, $A = \langle -2, 2 \rangle$,

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 15x - 3$, $A = \langle -1, 1 \rangle$,

c) $f(x) = \frac{x^2}{x+3}$, $A = \langle -1, 4 \rangle$,

d) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$, $A = \langle -2, 1 \rangle$,

e) $f(x) = (2 - x)e^{-x}$, $A = \langle 1, 4 \rangle$,

f) $f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$, $A = \langle \sqrt[4]{e}, e \rangle$.

16. Wyznacz całki nieoznaczone następujących funkcji:

a) $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 9x + 1$,

b) $f(x) = (4 + \sqrt{x^3})(4 - \sqrt{x^3})$,

c) $f(x) = \frac{2x^3 - 9x^2 - 2x + 9}{1 - x^2}$,

d) $f(x) = \frac{(\sqrt{x}-1)^2 - \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}$,

e) $f(x) = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^2 + x - 2}$,

f) $f(x) = 3 \sin x - 2 \cos x$.

17. Korzystając z twierdzenia o całkowaniu przez części, wyznacz całki nieoznaczone następujących funkcji:

a) $f(x) = (2x + 2) \cos x$,

b) $f(x) = x^2 \sin x$,

c) $f(x) = (x - 3) \cdot 3^x$,

d) $f(x) = (x^2 - 2)e^x$,

e) $f(x) = (5 - x) \ln x$,

f) $f(x) = \sqrt{x} \ln x$.

18. Korzystając z twierdzenia o całkowaniu przez podstawienie, wyznacz całki nieoznaczone następujących funkcji:

a) $f(x) = (2x - 9)^7$,

b) $f(x) = \sqrt{6x + 4}$,

c) $f(x) = x^2(2x^3 - 5)^6$,

d) $f(x) = x\sqrt{3x^2 + 2}$,

e) $f(x) = \cos(4x)$,

$$f) f(x) = \frac{\ln x}{x},$$

$$g) f(x) = xe^{-x^2}.$$

19. Oblicz całkę oznaczoną funkcji f na przedziale A , jeśli:

$$a) f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 6x - 7, A = \langle 0,1 \rangle,$$

$$b) f(x) = (\sqrt{x} - 2)x, A = \langle 0,2 \rangle,$$

$$c) f(x) = \frac{x^3 + 4x^2 + 2x + 8}{x + 4}, A = \langle -2,0 \rangle,$$

$$d) f(x) = |x - 1|, A = \langle -1,3 \rangle,$$

$$e) f(x) = |x^2 - x - 2|, A = \langle -2,3 \rangle,$$

$$f) f(x) = x \sin x, A = \langle -\frac{\pi}{2}, 0 \rangle,$$

$$g) f(x) = \sqrt{x} \ln x, A = \langle e, e^3 \rangle,$$

$$h) f(x) = \sqrt{2x + 9}, A = \langle 0,8 \rangle.$$

20. Oblicz pole obszaru ograniczonego wykresem funkcji f , osią Ox oraz prostymi $x = a$ i $x = b$, jeśli:

$$a) f(x) = \sqrt{x} + 2, a = 0, b = 4,$$

$$b) f(x) = (1 - x)^2, a = 0, b = 3,$$

$$c) f(x) = 2 \sin x, a = -\frac{\pi}{2}, b = \pi,$$

$$d) f(x) = x^2 - 2|x|, a = -2, b = 3.$$

21. Oblicz pole obszaru między krzywymi $y = f(x)$ oraz $y = g(x)$, jeśli:

$$a) f(x) = x^2 - 2x - 8, g(x) = 0,$$

$$b) f(x) = (x - 1)^2 - 1, g(x) = 3x,$$

$$c) f(x) = 2 - |x|, g(x) = x^2 - 4,$$

$$d) f(x) = \frac{1}{x^2}, g(x) = \frac{10 - x^2}{9}.$$